This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Informazioni su questo libro**

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

**Linee guide per l'utilizzo**

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

**Informazioni su Google Ricerca Libri**

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

433 06908261 2

# LEZIONI

SULLA

# TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

# LEZIONI

SULLA

# TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

PER

ALFREDO CAPELLI
Prof. ordinario nella R. Università di Napoli

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
*Via Gennaro Serra, 20*
1902

THE NEW
PUBLIC LIBRARY
255537
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R
1905
REG. NO. 5882/02

La presente opera è messa sotto la salvaguardia delle vigenti leggi
sulla proprietà letteraria.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

# PREFAZIONE

La teoria delle forme algebriche vanta già parecchie opere, alcune delle quali eccellenti, che trattano abbastanza distesamente di varie speciali categorie di forme. E particolarmente la teoria delle forme binarie si trova in esse già svolta in modo quasi completo; cosicchè ben poco di più potrebbe desiderarsi allo stato attuale di questo ramo dell'algebra.

Lo stesso non sembra potersi dire della teoria generale, per la quale lo studioso non può oggidì ancora esimersi dalla consultazione, non sempre agevole, delle memorie originali. A colmare, almeno in parte, questa lacuna è inteso il presente volume, che contiene le lezioni universitarie da me date su quest'argomento e da me stesso redatte in forma poco dissimile da quella tenuta nell'esposizione orale.

Chi vorrà leggere queste pagine, non si farà dunque meraviglia se, in conformità dello scopo che mi sono proposto, non mi sono in esse quasi mai occupato, tranne che in via di esemplificazione, di alcun particolare sistema di forme algebriche. Soltanto ho stimato utile di raccogliere in una breve appendice quella parte della teoria generale delle forme binarie che può bastare a mettere lo studioso in grado di poter leggere con facilità, anche saltuariamente, ed utilizzare gli eccellenti trattati sulle forme binarie cui ho sopra accennato.

Credo inutile aggiungere schiarimenti circa la ripartizione della materia da me svolta, potendo bastare a quest'oggetto una semplice occhiata all'indice dei capitoli e dei paragrafi.

Soltanto tengo ad esprimere qui i miei ringraziamenti al D.r Guglielmo Giordano per l'assistenza da lui prestatami nella revisione del manoscritto e nella correzione delle bozze.

Napoli, Luglio 1901.

# INDICE

## CAPITOLO I.

### Introduzione alla teoria generale delle forme algebriche.


§ I. Trasformazione lineare nel campo binario . . . . . *pag.* 1
„ II. „ „ „ ternario, quaternario ecc. . . „ 7
„ III. Operazioni di polare — Simboli operativi . . . . . „ 11
„ IV. Equazioni differenziali che caratterizzano le parentesi $(x\,y)$, $(x\,y\,z)$, etc. „ 18
„ V. Carattere invariantivo delle forme polari . . . . . „ 29
„ VI. Trasformazione di forme lineari — Serie di variabili controgredienti „ 34
„ VII. Relazioni identiche fra forme lineari . . . . . „ 39
„ VIII Espressione simbolica di una forma n.ria qualunque e delle sue polari . . . . . „ 43
„ IX. Alcuni teoremi sul calcolo con operazioni di polare . . . . . „ 50
„ X. Metodo delle variabili ausiliarie . . . . . „ 55
„ XI. Trasformazione di una forma qualunque mediante la trasformazione lineare dei suoi coefficienti simbolici . . . . . „ 61
„ XII. Definizione di invarianti e covarianti — Esempi . . . . . „ 68
„ XIII. Esprimibilità dei covarianti razionali come quozienti di covarianti interi . . . . . „ 72
„ XIV. Proprietà fondamentale dei covarianti . . . . . „ 74
„ XV. Relazioni fra ordini, gradi e peso di un covariante . . . . . „ 77
„ XVI. Numero degli invarianti e covarianti algebricamente indipendenti di un sistema di forme fondamentali . . . . . „ 82
„ XVII. I covarianti di Cayley e l'operazione $\Omega$ . . . . . „ 94
„ XVIII. Riduzione dell' operazione $\Omega_{xy\ldots z}$ ad operazioni di polare fra le stesse $x$, $y$,..., $z$. L'operazione $H_{xy\ldots z}$. . . . . „ 100
„ XIX. Altre operazioni di polare permutabili con ogni operazione di polare fra le stesse serie di variabili . . . . . „ 117
„ XX. Esprimibilità di una forma $f$ con $n$ serie di variabili $x$, $y$, ...., $t$ come somma di una polare $H_{xy\ldots t}f$ e di polari di forme con sole $n-1$ serie . . . . . „ 124
„ XXI. Applicazione della teoria precedente al caso di forme con tre serie di variabili . . . . . „ 131
„ XXII. Sviluppo di una forma algebrica con $n$ serie di variabili secondo le polari di forme con sole $n-1$ serie . . . . . „ 134
„ XXIII. Corollarii dello sviluppo stabilito nel precedente § . . . . „ 143
„ XXVI. Serie di variabili aggiunte alla serie fondamentale (serie di variabili geometriche). Controvarianti e covarianti aggiunti — Esempi . . . . . „ 153

## CAPITOLO II.

### Processi invariantivi — Equazioni differenziali dei covarianti — Rappresentazione delle forme invariantive.


§ I. L'operazione Ω eseguita su aggregati di elementi lineari . . *pag.* 16[illegible]
„ II. Applicazione allo sviluppo per polari . . . . . „ 17[illegible]
III. Covarianti di covarianti . . . . . „ 175
„ IV. Processo invariantivo di Aronhold . . . . . „ 179
„ V. Applicazione alla rappresentazione dei covarianti . . . . . „ 182
„ VI. Applicazione alla formazione di nuovi covarianti . . . . . „ 185
„ VII. Rappresentazione simbolica di forme di gradi qualisivogliano nei coefficienti delle forme fondamentali — Esempi . . . . . „ 188
„ VIII. Costruzione di forme invariantive sotto la forma simbolica caratteristica . . . . . „ 1[illegible]7
„ XI. Riduzione delle sostituzioni lineari . . . . . „ 202
„ X. Equazioni differenziali che caratterizzano i covarianti . . . . „ 207
„ XI. Riduzione del sistema di condizioni differenziali del § precedente „ 214
„ XII. Le equazioni differenziali dei covarianti espresse coi coefficienti effettivi delle forme fondamentali . . . . . „ 2[illegible]1
„ XIII. Rappresentazione simbolica caratteristica dei covarianti e dei semicovarianti . . . . . „ 224
„ XIV. Formole di riduzione . . . . . „ 233
„ XV. Origini o sorgenti (*sources*) dei covarianti . . . . . „ 237
„ XVI. Dimostrazione di un principio generale di aritmetica . . . . „ 249
„ XVII. Sopra un processo di riduzione delle funzioni razionali intere di $n$ variabili . . . . . „ 254
„ XVIII. Teorema di Hilbert . . . . . „ 257
„ XIX. Dimostrazione dell' esistenza dei sistemi finiti completi di covarianti . . . . . „ 260


## APPENDICE

### SULLE FORME ALGEBRICHE BINARIE


§ I. Formole di riduzione nel campo binario . . . . . *pag.* 269
„ II. Sviluppo di Clebsch e Gordan . . . . . „ 270
„ III. Determinazione dei coefficienti μ nello sviluppo del precedente § „ 271
„ IV. Proprietà fondamentali delle spinte (Ueberschiebungen) fra due forme binarie . . . . . „ 276
„ V. Deduzione di tutti gli invarianti e covarianti di un sistema di forme fondamentali per mezzo di spinte sulle forme stesse . . „ 281
„ VI. Calcolo della $k^{ma}$ spinta fra due covarianti posti sotto la forma simbolica caratteristica . . . . . „ 28[illegible]
„ VII. Relazioni identiche fra prime e seconde spinte . . . . . „ 28[illegible]

# LEZIONI SULLA TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

## CAPITOLO I

## *Introduzione alla teoria generale delle forme algebriche*

### §. I. *Trasformazione lineare nel campo binario.*

1. Mediante le formole di trasformazione (sostituzione lineare):

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' \end{aligned} \qquad (1)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2$; $\beta_1, \beta_2$ sono quattro coefficienti arbitrarii, tali però che il determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ (il *modulo* della trasformazione) sia diverso da zero, ad ogni coppia di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle variabili $x_1$ ed $x_2$, corrisponde un'unica coppia di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle $x_1'$, $x_2'$ e reciprocamente. La coppia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ va esclusa una volta per sempre; poichè, come si deduce facilmente dalla (1) essa si cambia sempre in $x_1' = 0$, $x_2' = 0$: si trasforma cioè in se stessa. Esclusa questa coppia per la quale il rapporto $x_1 : x_2$ non avrebbe un significato ben determinato, si può dire, evidentemente, che le (1) fanno corrispondere ad ogni

valore $x = x_1 : x_2$ del rapporto $x_1 : x_2$ un unico valore $x' = x_1' : x_2'$ e reciprocamente.

Si noti però che, a differenza delle $x_1, x_2$, le quali non potranno prendere, come si è detto, che valori finiti, la $x$ può assumere anche il valore $\infty$ (caratterizzato da $x_2 = 0$, come il valore $0$ è caratterizzato da $x_1 = 0$).

2. Supponiamo che, mediante le (1) le coppie $x_1, x_2$, $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; ..... si trasformino rispettivamente nelle $x_1', x_2'$; $y_1', y_2'$; $z_1', z_2'$; ...., cioè che sia:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2', \qquad & z_1 &= \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2', \ \ldots\ldots, \\ y_2 &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2', \qquad & z_2 &= \beta_1 z_1' + \beta_2 z_2', \ \ldots\ldots \end{aligned} \quad ; \quad (2)$$

diremo allora che le coppie $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; ... si trasformano cogredientemente nelle $x_1', x_2'$; $y_1', y_2'$; $z_1', z_2'$; ...., cioè mediante la stessa sostituzione lineare. Si dice anche che i sistemi $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; .... etc. sono cogredienti.

Se i due sistemi $x_1, x_2$; $y_1, y_2$ sono cogredienti, la nota regola del prodotto di due determinanti dà:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad ;$$

ovvero, con notazione abbreviata(*):

$$(x\,y) = (\alpha\,\beta)(x'\,y'). \qquad (3)$$

---

(*) Nella teoria delle forme algebriche si fa uso frequentemente delle notazioni abbreviate:

$$(x\,y) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (x\,y\,z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots$$

3. Si abbiano ora tre sistemi di variabili binarie cogredienti: $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; si avranno, essendo $x'_1, x'_2$; $y'_1, y'_2$; $z'_1, z'_2$ le variabili trasformate, le relazioni:

$$(xy) = (\alpha\beta)(x'y'), \quad (yz) = (\alpha\beta)(y'z'), \quad (zx) = (\alpha\beta)(z'x'), \tag{3'}$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{(xz)}{(yz)} = \frac{(x'z')}{(y'z')} \qquad \frac{(xy)}{(xz)} = \frac{(x'y')}{(x'z')}. \tag{3''}$$

Ciò si può esprimere dicendo che: colle variabili dei tre sistemi cogredienti $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; $z_1, z_2$ si possono comporre due *invarianti assoluti*, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)} \quad \text{ed} \quad \frac{(xy)}{(xz)}. \tag{4}$$

In generale diremo che una funzione gode di proprietà *invariantiva*, quando costruita la funzione stessa una volta colle variabili primitive, ed un'altra volta colle trasformate (mercè una certa sostituzione lineare), la funzione costruita colle variabili primitive è eguale a quella costruita colle trasformate, moltiplicata per una certa funzione dei soli coefficienti della trasformazione. La proprietà invariantiva sarà *assoluta*, quando la funzione razionale si riduce all'unità. Così, p.es., i primi membri di (3'') sono degli *invarianti assoluti*. Ritorneremo, del resto, su questo importante concetto.

Ogni funzione degli invarianti assoluti (4) è evidentemente, del pari, un invariante assoluto; e, reciprocamente, si potrebbe dimostrare, come si vedrà a suo tempo, che

ogni invariante assoluto, costruito colle suddette sei variabili, è una funzione degli invarianti assoluti (4).

Si dovrebbe, pertanto, rigorosamente dire che: *tre sistemi di variabili binarie cogredienti ammettono due soli invarianti assoluti fra loro indipendenti*; ma nella pratica la parola *indipendenti* si sottintende.

4. Se delle $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; .... consideriamo i soli rapporti $x = x_1 : x_2$; $y = y_1 : y_2$; $z = z_1 : z_2$; .... secondochè si è già accennato all'art. 1, diremo che essi rappresentano altrettanti *punti* (*del campo binario* o *di prima specie*) che indicheremo semplicemente con $x$, $y$, $z$, etc. Geometricamente si potrà infatti rappresentare il punto $x$ mediante quel punto di una retta indefinita che dista da un'origine fissa $O$ della quantità $\frac{x_1}{x_2}$, beninteso in senso algebrico, cioè prendendo il punto $x$ da una parte di $O$, o dalla parte opposta, secondochè $\frac{x_1}{x_2}$ sia positivo o negativo.

Nelle applicazioni geometriche della teoria delle forme algebriche hanno pertanto speciale importanza quelle funzioni delle $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; ....: che dipendono soltanto dai rapporti $x_1 : x_2$; $y_1 : y_2$; .... Noi le chiameremo, per semplicità, *funzioni dei punti* $x$, $y$, etc. Gl'invarianti assoluti (4) sono tali nel senso *formale*, ma non sono, come si suol dire, invarianti assoluti geo-

metrici, perchè non sono funzioni di punti.

5. Se consideriamo quattro sistemi di variabili binarie e cogredienti, si possono costruire quattro invarianti assoluti formali, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)}, \quad \frac{(xz)}{(xy)} \quad \frac{(xt)}{(yt)}, \quad \frac{(xt)}{(zt)},$$

mediante i quali si può facilmente comporre un invariante assoluto geometrico, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)} : \frac{(xt)}{(yt)} \tag{5}$$

che si chiama il rapporto anarmonico dei quattro punti $x, y, z, t$, e s'indicherà brevemente con $[xyzt]$.

Vediamo dunque che se i quattro punti $x, y, z, t$ si trasformano cogredientemente nei quattro punti $x', y', z', t'$, deve essere:

$$[xyzt] = [x'y'z't'] \tag{6}$$

La proposizione reciproca è vera sempreché i quattro punti $x, y, z, t$ (e quindi necessariamente anche i quattro $x', y', z', t'$) siano fra loro distinti.

Questa restrizione è necessaria, poichè p. es. la (6) è soddisfatta per:

$$x = y, \quad z \neq t \quad ; \quad x' = y', \quad z' = t' ;$$

nel mentre che la quaterna $x = y$, $z = t$ non potrebbe evidentemente trasformarsi nella quaterna $x' = y'$, $z = t'$, essendo $z \neq t$.

6. Poichè $x_1, x_2$ (e così $y_1, y_2$) assumono soltanto valori fi-

niti e non entrambi nulli, l'eguaglianza

$$(xy) = 0$$

equivale all'altra $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, cioè esprime che il punto $x$ coincide col punto $y$. Si vede quindi facilmente, esaminando l'espressione (5), che il simbolo del rapporto armonico $[x\,y\,z\,t]$ ha un significato ben determinato (nullo, finito od infinito) semprechè tre dei punti $x, y, z, t$ non coincidano in un solo.

Escluso questo caso, il simbolo $[x\,y\,z\,t]$ non può prendere, come è noto, permutando comunque le lettere $x, y, z, t$, che sei valori determinati:

$$\begin{aligned} [xyzt] &= \lambda_1 , & [yxzt] &= \frac{1}{\lambda_1} \\ [zxyt] &= \lambda_2 , & [xzyt] &= \frac{1}{\lambda_2} \\ [yzxt] &= \lambda_3 , & [zyxt] &= \frac{1}{\lambda_3} \end{aligned} \tag{7}$$

che sono funzioni di un solo fra essi in virtù delle relazioni:

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} = 1 , \quad \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3} = 1 , \quad \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} = 1 . \tag{8}$$

7. Se due dei tre valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono eguali, segue dalle (8) che essi sono tutti eguali fra di loro, e precisamente che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\varepsilon ,$$

essendo $\varepsilon$ una radice cubica complessa dell'unità. Quanto agli altri tre valori si avrà poi:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3} = -\varepsilon^2 .$$

In questo caso il rapporto si dice equiarmonico.

E' altresì importante il caso in cui uno dei sei rapporti (1) p. es. il primo sia armonico, cioè abbia il valore $-1$. Si ha allora:

$$\lambda_1 = -1 \quad , \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad , \lambda_3 = 2$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = -1 \quad , \frac{1}{\lambda_2} = 2 \quad , \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{2}$$

Notiamo finalmente il caso in cui due dei quattro punti $x, y, z, t$ coincidono, p. es. $x = y$. Si ha allora:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_3} = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2} = 1 \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} = \infty \, ;$$

e, reciprocamente, se uno dei rapporti anarmonici è zero (ovvero 1 od $\infty$), la quaterna $x, y, z, t$ avrà due punti coincidenti.

---

## §° II. *Trasformazione lineare nel campo ternario, quaternario, etc.*

8. Mediante la sostituzione lineare (ternaria)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \end{aligned} \tag{1}$$

in cui il determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \equiv (\alpha \beta \gamma) \quad , \tag{2}$$

che si chiama *modulo* della sostituzione (1), è diverso da zero, ad ogni terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle $x_1, x_2, x_3$, corrisponde un unica terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle $x'_1, x'_2, x'_3$, e reciprocamente. Anche qui si considereranno soltanto *valori finiti* delle variabili, e tra questi si escluderà, una volta per sempre, la terna $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, che è sempre trasformata in se stessa.

Se della terna $x_1, x_2, x_3$ si considerino soltanto i rapporti $x_1 : x_2 : x_3$, diremo che la terna stessa rappresenta un *punto ternario*, o *di seconda specie*, che indicheremo brevemente con $x$; cosicchè le terne $x_1, x_2, x_3$ e $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ rappresenteranno lo stesso punto ternario. E' chiaro che, in virtù delle (1), ad ogni punto ternario $x$ corrisponderà un unico punto ternario $x'$, e reciprocamente.

Se una funzione $f(x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2, y_3 ; \ldots)$ dipende soltanto dai rapporti $x_1 : x_2 : x_3 ; y_1 : y_2 : y_3 ; \ldots$ diremo brevemente che essa è *funzione dei punti ternarii* $x, y, \ldots$

9. I punti ternarii si rappresentano geometricamente in un piano come in geometria analitica. Così p. es. si potrà convenire di rappresentare il punto ternario analitico $x_1 : x_2 : x_3$ mediante quel punto del piano che rispetto a due assi ortogonali fissi ha per ascissa

$\frac{x_1}{x_3}$ e per ordinata $\frac{x_2}{x_3}$.

Secondo questa interpretazione geometrica le uguaglianze:

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 0,$$

rappresentano rispettivamente l'asse delle $x_2$, l'asse delle $x_1$ e *la retta all'infinito*. I tre sistemi:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

rappresentano rispettivamente l'origine delle coordinate, il punto all'infinito dell'asse delle $x_1$ ed il punto all'infinito dell'asse delle $x_2$. Il sistema formato dalle tre equaglianze: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ viene escluso a priori, come già si è notato.

10. Dalla (1) e dalla regola pel prodotto di due determinanti di terz'ordine segue:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{vmatrix}$$

o più brevemente, secondo la notazione (2):

$$(x\,y\,z) = (\alpha\beta\gamma)(x'y'z'), \tag{3}$$

sempre che i sistemi (o come anche si dicono serie) di variabili $x, y, z$ siano cogredienti, cioè vengano sottoposti alla stessa trasformazione lineare (1).

che si chiama *modulo della sostituzione* (1), è diverso da zero, ad ogni terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle $x_1, x_2, x_3$, corrisponde un unica terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle $x'_1, x'_2, x'_3$, e reciprocamente. Anche qui si considereranno soltanto *valori finiti* delle variabili, e tra questi si escluderà, una volta per sempre, la terna $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, che è sempre trasformata in se stessa.

Se della terna $x_1, x_2, x_3$ si considerino soltanto i rapporti $x_1 : x_2 : x_3$, diremo che la terna stessa rappresenta *un punto ternario*, o *di seconda specie*, che indicheremo brevemente con $x$; cosicchè le terne $x_1, x_2, x_3$ e $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ rappresenteranno lo stesso punto ternario. E' chiaro che, in virtù delle (1), ad ogni punto ternario $x$ corrisponderà un unico punto ternario $x'$, e reciprocamente.

Se una funzione $f(x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2, y_3 ; \ldots)$ dipende soltanto dai rapporti $x_1 : x_2 : x_3 ; y_1 : y_2 : y_3 ; \ldots$ diremo brevemente che essa è *funzione dei punti ternarii* $x, y, \ldots$

9. I punti ternarii si rappresentano geometricamente in un piano come in geometria analitica. Così p. es. si potrà convenire di rappresentare il punto ternario arbitrario $x_1 : x_2 : x_3$ mediante quel punto del piano che rispetto a due assi ortogonali fissi ha per ascissa

$\frac{x_1}{x_3}$ e per ordinata $\frac{x_2}{x_3}$.

Secondo questa interpretazione geometrica le uguaglianze:

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 0\,,$$

rappresentano rispettivamente l'asse delle $x_2$, l'asse delle $x_1$ e la retta all'infinito. I tre sistemi:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

rappresentano rispettivamente l'origine delle coordinate, il punto all'infinito dell'asse delle $x_1$ ed il punto allo infinito dell'asse delle $x_2$. Il sistema formato dalle tre equaglianze: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ viene escluso a priori, come già si è notato.

10. Dalle (1) e dalla regola pel prodotto di due determinanti di terz'ordine segue:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{vmatrix}$$

o più brevemente, secondo la notazione (2):

$$(x\,y\,z) = (\alpha\beta\gamma)(x'y'z'), \tag{3}$$

sempreché i sistemi (o come anche si dicono serie) di variabili: $x, y, z$ siano cogredienti, cioè vengano sottoposti alla stessa trasformazione lineare (1).

Se aggiungiamo una quarta serie $t_1, t_2, t_3$ di variabili, potremo comporre, in virtù delle (3), analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo precedente, degli *invarianti assoluti ternarii*. E precisamente possiamo formare i tre invarianti assoluti:

$$\frac{(xyz)}{(yzt)}, \qquad \frac{(xzt)}{(yzt)}, \qquad \frac{(xty)}{(yzt)} \tag{4}$$

che sono fra loro *indipendenti*, come è agevole riconoscere (attribuendo p.es. ad $y, z, t$ dei valori qualsivogliano, purchè tali da dare $(yzt) \neq 0$ e determinando quindi le $x_1, x_2, x_3$ in modo che i numeratori delle tre funzioni (4) assumano valori prefissati a piacere).

11. Volendo però avere degli *invarianti assoluti geometrici*, cioè degli invarianti assoluti che siano funzioni di punti, occorrono almeno cinque serie $x, y, z, t, v$. Mediante queste cinque serie possiamo infatti costruire i due invarianti assoluti geometrici fra loro indipendenti:

$$\frac{(xzt)}{(yzt)} : \frac{(xzv)}{(yzv)}, \qquad \frac{(xzt)}{(yzt)} : \frac{(xtv)}{(ytv)}. \tag{5}$$

Quindi: *affinchè cinque punti $x, y, z, t, v$ siano trasformabili cogredientemente in altri cinque punti $x', y', z', t', v'$ è necessario che siano soddisfatte le condizioni:*

$$\frac{(xzt)(yzv)}{(yzt)(xzv)}=\frac{(x'z't')(y'z'v')}{(y'z't')(x'z'v')}\,,\quad \frac{(xzt)(ytv)}{(yzt)(xtv)}=\frac{(x'z't')(y't'v')}{(y'z't')(x't'v')} \qquad (6)$$

12. Risultati analoghi a quelli ottenuti nel paragrafo precedente ed in questo si avranno per il campo quaternario (colla serie fondamentale $x_1, x_2, x_3, x_4$ e le sue cogredienti), per il quinario, etc. Così ad esempio se sei punti $x, y, z, t, u, v$ di un campo quaternario $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ si possono trasformare, mediante una stessa trasformazione lineare del campo, rispettivamente nei sei punti quaternarii $x', y', z', t', u', v'$, dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$\frac{(xztu)}{(yztu)}\cdot\frac{(xztv)}{(yztv)}=\frac{(x'z't'u')}{(y'z't'u')}\cdot\frac{(x'z't'v')}{(y'z't'v')} \qquad (7)$$

con altre analoghe. E' facile interpretare geometricamente le (6) e la (7) mediante le aree dei triangoli che hanno per vertici tre punti $x, y, z$ (pel campo ternario), ovvero i volumi de' tetraedri che hanno per vertici quattro punti $x, y, z, t$ (pel campo quaternario).

---

## §° III. *Operazioni di polare - Simboli operativi.*

13. Se da una funzione $f$ delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$; .... si deduce la funzione:

$$y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots\cdots+y_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (1)$$

si dice che si è eseguita sulla $f$ un'operazione di polare. La nuova funzione (1) che, oltre alle variabili $x_1, \dots x_n$, conterrà, se già non la conteneva prima, anche le variabili $y_1, \dots, y_n$, si dice *prima polare di $f$ rispetto alla serie* $y_1, \dots, y_n$ (nuove variabili da considerarsi come affatto indipendenti dalle $x_1, \dots, x_n$). Noi diremo che la nuova funzione (1) si è ottenuta da $f$ applicando ad $f$ il simbolo operativo:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

che indicheremo brevemente con $\mathcal{D}_{xy}$; cosicchè potremo scrivere:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = \mathcal{D}_{xy} f.$$

Chiameremo $\mathcal{D}_{xy}$ *un'operazione di polare elementare*. Ad evitare equivoci, converrà però soggiungere se si tratti di un campo unitario, binario, ternario, etc. A seconda di questi diversi casi il significato di $\mathcal{D}_{xy}$ sarà dato da

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

ovvero da:

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

ovvero da

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

etc.

14. Se il simbolo operativo $\mathcal{D}_{xy}$ si applichi due volte di seguito ad $f$, si otterrà la così detta *seconda polare di $f$*, rap-

presentabile con $\mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xy} f$, o, più brevemente con $\mathcal{D}_{xy}^2 f$. Similmente $\mathcal{D}_{xy}^3 f$ ci rappresenterà la terza polare di $f$ ot-tenuta da $f$ applicando tre volte consecutivamente ad $f$ l'o-peratore elementare $\mathcal{D}_{xy}$; e così di seguito. È chiaro che la prima polare della prima polare di $f$ coincide colla secon-da polare di $f$, e così la prima polare della seconda pola-re colla terza polare di $f$, e così di seguito.

15. L'operazione di polare è d'importanza fondamentale in Analisi non meno che in Geometria (dove ha ricevuto il suo nome). Essa si presenta naturalmente in Analisi nello sviluppo di Taylor:

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left[y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x^2} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[y_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + 3 y_1^2 y_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \cdots\right] +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots ;$$

che si può anche scrivere simbolicamente:

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f + \frac{1}{1\cdot 2}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f + \cdots$$

$$= f + \mathcal{D}_{xy} f + \frac{1}{1\cdot 2} \mathcal{D}_{xy}^2 f + \cdots\cdots$$

Ancora più semplicemente si potrà scrivere:

$$f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) = \left[1 + \frac{1}{\underline{|1}} \mathcal{D}_{xy} + \frac{1}{\underline{|2}} \mathcal{D}_{xy}^2 + \cdots\right] f(x_1, \ldots, x_n) = e^{\mathcal{D}_{xy}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

16. L'operatore $\mathcal{D}_{xy}$ applicato a delle funzioni qualsivogliano $f, \varphi, \ldots$ delle $x, y, \ldots$ dà luogo a delle forme affatto simili a quelle che dà il Calcolo infinitesimale per il semplice simbolo operativo $\frac{\partial}{\partial x}$. Cioè:

$$\mathcal{D}_{xy}[f+\varphi+\psi+\ldots] = \mathcal{D}_{xy}f + \mathcal{D}_{xy}\varphi + \mathcal{D}_{xy}\psi + \ldots\ldots,$$

$$\mathcal{D}_{xy}(f\cdot\varphi) = [\mathcal{D}_{xy}f]\cdot\varphi + [\mathcal{D}_{xy}\varphi]\cdot f.$$

$$\mathcal{D}_{xy}(f\cdot\varphi\cdot\psi) = [\mathcal{D}_{xy}f]\cdot\varphi\cdot\psi + [\mathcal{D}_{xy}\varphi]\cdot f\cdot\psi + [\mathcal{D}_{xy}\psi]\cdot\varphi\cdot f.$$

$$\mathcal{D}_{xy}\frac{f}{\varphi} = \frac{[\mathcal{D}_{xy}f]\varphi - [\mathcal{D}_{xy}\varphi]f}{\varphi^2}.$$

$$\mathcal{D}_{xy}F(f,\varphi,\psi,\ldots) = \frac{\partial F}{\partial f}\mathcal{D}_{xy}f + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\mathcal{D}_{xy}\varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi}\mathcal{D}_{xy}\psi + \ldots$$

17. Queste stesse proprietà competono anche al simbolo $\mathcal{D}_{xx}$ che si definirà analogamente

$$\mathcal{D}_{xx} \equiv x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

e si chiamerà operazione di polare elementare impropria. A questo simbolo si collega, come si sa dal Calcolo infinitesimale, una proprietà caratteristica delle funzioni omogenee di grado $\mu$ ($\mu$ potendo significare qualsiasi numero reale) delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x$; cioè delle funzioni che soddisfano alla condizione:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_3) = t^{\mu}f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (2)$$

essendo $t$ un parametro variabile indipendente dalle $x$. Questa proprietà, conosciuta sotto il nome di teorema di Eulero, si può esprimere, mediante il simbolo $\mathcal{D}_{xx}$, brevemente così:

$$\mathcal{D}_{xx}f = \mu f. \qquad (3)$$

Essa è caratteristica per le funzioni omogenee di grado $\mu$; poichè, reciprocamente, ogni funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ soddisfacente alla (3) soddisfa anche alla (2).

18. Nel corso di queste lezioni, noi ci occuperemo specialmente di funzioni razionali ed intere:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n ; y_1, \ldots, y_n ; \ldots) \equiv f(x; y; \ldots)$$

di una o più serie di variabili $n^{rie}$:

$$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n ; \; y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_n ; \; \ldots\ldots,$$

omogenee rispetto alle variabili di ogni singola serie. Funzioni siffatte si denominano *forme algebriche* $n^{rie}$ relative alla serie $n^{rie}$ $x_1, \ldots, x_n$, o a più serie $n^{rie}$, $x, y, \ldots$. Quando importi esprimere che la forma $f(x; y; \ldots)$ è omogenea e del grado $\mu$ nelle $x_1, \ldots, x_n$; omogenea e del grado $\nu$ nelle $y_1, \ldots y_n$ ecc. in luogo di scrivere semplicemente $f(x, y, z, \ldots)$ scriveremo: $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}, \overset{\rho}{z}, \ldots)$.

Quando si tratta di forme algebriche, i gradi $\mu, \nu$ prendono piuttosto il nome di *ordini* della forma.

Come casi particolari più semplici delle forme $n^{rie}$ con una o più serie di variabili si hanno le forme *binarie*, *ternarie*, *quaternarie*, etc, secondochè le variabili che compongono ogni serie sono due, tre, quattro, ecc.

Dal teorema di Eulero (V. art. prec.) segue manifestamente che: « affinchè una forma algebrica $n^{ria}$ sia dello stesso ordine rispetto a ciascuna delle serie $n^{rie}$

$x, y, z, \ldots$ in essa contenute, è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xx} f = \mathcal{D}_{yy} f = \mathcal{D}_{zz} f = \ldots \text{»}$$

19. Con $n$ serie $n^{ie}$ indipendenti:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y &\equiv y_1, y_2, \ldots, y_n \\ z &\equiv z_1, z_2, \ldots, z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u &\equiv u_1, u_2, \ldots, u_n \end{aligned} \tag{4}$$

si possono formare $n^2$ operatori elementari:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \ldots, \mathcal{D}_{xu} \\ &\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{yy}, \mathcal{D}_{yz}, \ldots \mathcal{D}_{yu} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathcal{D}_{ux}, \mathcal{D}_{uy}, \mathcal{D}_{uz}, \ldots \mathcal{D}_{uu} \end{aligned} \tag{5}$$

i quali sono fra loro *linearmente indipendenti*. Con ciò si vuole intendere che, indicati per brevità gli $n^2$ operatori (5) con $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \ldots \mathcal{D}_{n^2}$, non esistono delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n^2}$ delle $n^2$ variabili $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ etc. tali da aversi identicamente:

$$\varphi_1 \mathcal{D}_1 + \varphi_2 \mathcal{D}_2 + \ldots\ldots + \varphi_{n^2} \mathcal{D}_{n^2} = 0,$$

qualunque sia cioè la funzione $F(x; y; \ldots)$ cui si applichi l'operazione espressa dal primo membro.

Infatti, poichè non può aversi, qualunque sia la

$F$, alcuna relazione fra le derivate $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots,$ $\frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots,$ ammesso che si avesse, qualunque sia $F$:

$$\varphi_1 \mathcal{D}_1 F + \varphi_2 \mathcal{D}_2 F + \ldots + \varphi_{n^2} \mathcal{D}_{n^2} F = 0,$$

dovrebbero annullarsi separatamente le parti del primo membro che si riferiscono agli operatori contenuti in una stessa linea orizzontale del quadro (5). Ma se fosse p. es.

$$\mathcal{D}_{xx} + \varphi_2 \mathcal{D}_{xy} + \varphi_3 \mathcal{D}_{xz} + \ldots + \varphi_n \mathcal{D}_{xu} = 0,$$

dovrebbero verificarsi le identità:

$$x_1 \varphi_1 + y_1 \varphi_2 + \ldots + u_1 \varphi_n = 0$$

$$x_2 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \ldots + u_2 \varphi_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n \varphi_1 + y_n \varphi_2 + \ldots + u_n \varphi_n = 0$$

il che è impossibile a meno che non sia identicamente:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots \varphi_n = 0$$

giacchè il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & u_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & y_n & \ldots & u_n \end{vmatrix}$$

non è nullo identicamente

20. Fra gli operatori (5) sussistono però delle relazioni di grado superiore al primo. Si hanno infatti le identità quadratiche dei seguenti otto tipi, ciascuna delle quali indicheremo con un numero romano:

$$\begin{cases} \text{I} & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{zu} - \mathcal{D}_{zu}\mathcal{D}_{xy} = 0 \\ \text{II} & \mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz} = 0 \\ \text{III} & \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zx} = 0 \\ \text{IV} & \mathcal{D}_{yy}\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{I}' & \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz} = \mathcal{D}_{xz} \\ \text{II}' & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xy} \\ \text{III}' & \mathcal{D}_{yy}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yy} = \mathcal{D}_{xy} \end{cases}$$

$$\text{I}'' \quad \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yy},$$

delle quali alcune sono evidenti, nel mentre che le altre si possono verificare senza difficoltà.

---

## §° IV. *Equazioni differenziali che caratterizzano le parentesi $(x\,y)$, $(x\,y\,z)$, etc.*

21. La parentesi $n^{ria}$ $(x\,y\,z\ldots)$ analoga a quelle già incontrate nel campo binario e ternario, gode della proprietà di essere annullata identicamente da ogni operazione $\mathcal{D}_{pq}$, in cui $p$ e $q$ sono due serie distinte di variabili, scelte comunque fra quelle che figurano nella parentesi stessa. Consideriamo, per fissare le idee, la parentesi quaternaria:

$$V \equiv (x\,y\,z\,t) = \Sigma \pm x_1 y_2 z_3 t_4 .$$

Essa è annullata da tutte le operazioni elementari proprie che si possono formare colle serie $x, y, z, t$, cioè

da tutte le operazioni del quadro:

$$\begin{matrix} \mathcal{D}_{xx}, & \mathcal{D}_{xy}, & \mathcal{D}_{xz}, & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{yx}, & \mathcal{D}_{yy}, & \mathcal{D}_{yz}, & \mathcal{D}_{yt} \\ \mathcal{D}_{zx}, & \mathcal{D}_{zy}, & \mathcal{D}_{zz}, & \mathcal{D}_{zt} \\ \mathcal{D}_{tx}, & \mathcal{D}_{ty}, & \mathcal{D}_{tz}, & \mathcal{D}_{tt} \end{matrix} \tag{1}$$

eccettuate le $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \mathcal{D}_{zz}, \mathcal{D}_{tt}$, per le quali si ha (art. 14)

$$\mathcal{D}_{xx} V = \mathcal{D}_{yy} V = \mathcal{D}_{zz} V = \mathcal{D}_{tt} V = V. \tag{2}$$

Si ha, infatti, p. es.

$$\mathcal{D}_{yz} V = z_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} + \cdots\cdots + z_n \frac{\partial V}{\partial y_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & z_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & z_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = 0$$

22 - Queste proprietà caratterizzano perfettamente la parentesi $(x\,y\,z\,t)$. E precisamente: se $\varphi(x, y, z, t)$ è una forma quaternaria soddisfacente alle equazioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{xx}\varphi = \varphi^{(*)}, \quad \begin{matrix} \mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{xt}\varphi = 0 \\ \mathcal{D}_{yx}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{yz}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{yt}\varphi = 0 \\ \mathcal{D}_{zx}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{zy}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{zt}\varphi = 0 \end{matrix} \tag{3}$$

---

(*) E quindi anche alle altre equazioni differenziali $\mathcal{D}_{yy}\varphi = \varphi$, etc., poichè è (art. 20, I''): $\mathcal{D}_{yy} = \mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$.

essa coincide, a meno di un fattore costante, con $(xyzt)$.

Più generalmente: se $\varphi(x,y,z,t)$ è una forma algebrica quaternaria soddisfacente alle condizioni:

$$(4) \qquad \mathcal{D}_{pq}\varphi = 0 \qquad (p,q = x,y,z,\ p \neq q)$$

e di ordine $m$ in ciascuna delle serie, deve essere identicamente:

$$\varphi = A.(xyzt)^m,$$

$A$ essendo una costante. È poi senz'altro evidente che, reciprocamente, la potenza $(xyzt)^m$ soddisfa alle (4), poichè p. es. (art. 16).

$$\mathcal{D}_{xy}V^m = mV^{m-1}[\mathcal{D}_{xy}V] = 0.$$

23. Questo importante teorema si potrebbe stabilire senza uscire dal campo delle forme algebriche. Noi, per ora, preferiamo dedurlo da un teorema di Jacobi sui sistemi di equazioni differenziali lineari, del quale è stato già fatto uso, con successo, nella teoria degl'invarianti.(*)

---

(*) Si veggia a questo proposito, l'Introduzione del Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degl'Invarianti nell'ultimo quarto di secolo del prof. F. Meyer (traduz. dal tedesco di G. Vivanti, Napoli, Pellerano, 1900) opera che il lettore potrà consultare anche in seguito, con grande vantaggio, per quanto riguarda la storia delle teorie, di cui ci occuperemo in queste lezioni.

Teorema di Jacobi. Sia il sistema di $m$ equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee, con $\ell$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} X_1' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_\ell' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} = 0 \\ X_1'' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2'' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_\ell'' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2^m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_\ell^m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} = 0 \end{cases}$$

(dove $X_1', \ldots, X_\ell^m$ sono delle funzioni conosciute di tutte le variabili), le quali siano fra loro indipendenti, tali cioè che gli $m$ *operatori lineari*

$$X^{(i)} = X_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_\ell^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

siano fra loro linearmente indipendenti (art. 19). Se gli operatori lineari $X^{(i)}$ soddisfano alle identità:

$$X^{(h)} X^{(k)} - X^{(k)} X^{(h)} = \alpha_1^{h,k} X^{(1)} + \alpha_2^{h,k} X^{(2)} + \cdots + \alpha_m^{h,k} X^{(m)}$$

$$h, k = 1, 2, \ldots m$$

essendo le $\alpha_j^{h,k}$ funzioni opportunamente scelte delle $x_1, \ldots, x_\ell$, il sistema $(\alpha)$ ammette precisamente $\ell - m$ integrali distinti; esistono cioè $\ell - m$ (differenza tra il numero delle variabili e quello delle equazioni) funzioni $\varphi$ di tutte le variabili, fra loro indipendenti, soddisfacenti al sistema, ed ogni altra funzione soddisfacente al sistema non è che una funzione di esse, e reci-

procamente.(*)

24. Per applicare questo teorema al nostro caso, noi considereremo fra le $l$ variabili delle serie $x, y, z, t$ ($l = n^2$; nel caso $n^{\text{rio}}$), le $m$ equazioni ($m = n^2 - 1$ nel caso $n^{\text{rio}}$) alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0\ ,\ \mathcal{D}_{yx}\varphi = 0\ ,\ \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, \ldots, \mathcal{D}_{zt}\varphi = 0$$

$$(5)\quad [\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yy}]\varphi = 0\ ,\ [\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{zz}]\varphi = 0\ ,\quad [\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{tt}]\varphi = 0,$$

che, per quanto si è già detto all'art. 19 sono fra loro indipendenti nel senso già spiegato. Poichè gli operatori:

$$\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{yx}, \ldots, \mathcal{D}_{tz}, \text{ e } \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yy}, \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{zz}, \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{tt},$$

che definiscono il sistema soddisfano, come segue facilmente dalle relazioni quadratiche riportate all'art. 20, alle condizioni rappresentate dalle ($\beta$), e poichè $l - m = 1$, il sistema (5) ammetterà un unico integrale distinto.

Conchiudiamo dunque, poichè la funzione $\varphi = (xyzt)$ soddisfa evidentemente al sistema (5), che *ogni funzione $\varphi$ delle $x, y, z, t$ soddisfacente al sistema (5) è necessariamente una funzione della parentesi $(xyzt)$*. Reciprocamente, *ogni funzione $(xyzt)$ soddisfa evidentemente al sistema (5)*.

Se dunque imponiamo, inoltre, alla funzione di

---

(*) Per la dimostrazione di questo teorema vedi p. es. Jordan - Traité d'Analyse. T. III.

$(x\,y\,z\,t)$ la condizione di essere una forma algebrica di ordine $m$ in ogni serie, avremo appunto, a meno di un coefficiente costante: $\varphi = (x\,y\,z\,t)^m$. c. d. d.

25. Il sistema delle equazioni che caratterizzano la potenza della parentesi $n^{ria}$ $(x\,y\,z\,t\ldots u\,v)$ colle $n$ serie $x, y, z, \ldots, u, v$, si può notevolmente semplificare si ha, in fatti, il seguente teorema(*): *affinchè una forma algebrica con $n$ serie di variabili $n^{rie}$, $\varphi(x, y, z, \ldots, u, v)$ sia una potenza della parentesi $(x\,y\,z\,t\ldots u\,v)$ moltiplicata per una forma colle sole serie $y, z, \ldots, v$, è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle $n-1$ equazioni alle derivate parziali:*

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0,\ \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, \ldots, \mathcal{D}_{xu}\varphi = 0,\ \mathcal{D}_{xv}\varphi = 0. \qquad (6)$$

Di qui segue, come corollario immediato, che: *se la forma algebrica $\varphi(x, y, \ldots, v)$ soddisfa alle condizioni (6) ed è dello stesso ordine $m$ in ciascuna delle serie $x, \ldots, v$, essa non è altro, fatta astrazione da un coefficiente costante, che la potenza $m^{ma}$ della parentesi $(x\,y\,z\ldots v)$.*

26. Esaminando, in fatti, il sist. (6), si riconosce che esso soddisfa a tutte le condizioni richieste per l'applica-

---

(*) Per la dimostrazione puramente algebrica di questo teorema cfr. Capelli. *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (Memoria dei Lincei 1882, art. 54).

zione del teorema di Jacobi (art. 23); giacchè gli $n-1$ operatori $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \ldots \mathcal{D}_{xv}$ sono linearmente indipendenti e fra loro permutabili, due a due. In questo caso il numero delle variabili è $l = n^2$, il numero delle equazioni è $m = n-1$; dunque il numero $l-m$ degl'integrali distinti del sistema (6) sarà $n^2-n+1$

Ma $n^2-n+1$ funzioni indipendenti $\varphi$, soddisfacenti alle (6), si trovano immediatamente; basterà prendere, in fatti, per tali funzioni $\varphi$ le stesse $n^2-n$ variabili

$$y_1, \ldots y_n \; ; \ldots\ldots ; v_1, \ldots, v_n$$

ed inoltre la parentesi $(x\,y\,z \ldots v)$. Pertanto: ogni funzione $\varphi$ soddisfacente al sistema (6) dev'essere della forma:

$$\varphi = F\left[(x\,y\,z \ldots v),\, y,\, z, \ldots, v\right],$$

$F$ essendo il simbolo di una funzione arbitraria.

Imponendo inoltre a $\varphi$ la condizione di essere una *forma algebrica*, si avrà evidentemente:

$$\varphi = (x\,y\,z \ldots v)^m \cdot \psi(y, z, \ldots, v),$$

dove $\psi$ è una forma algebrica contenente le sole serie di variabili $y, z, \ldots, v$. c.d.d.

27. Se degli operatori $\mathcal{D}_{pq}$, con due serie distinte $p, q$ formate con certe serie di variabili

$$x, y, z, \ldots u, v, \qquad (7)$$

consideriamo soltanto quelli nei quali i due indici si seguono in ordine conforme a quello che essi hanno nella

successione (7), è facile riconoscere, mercè le relazioni dell'art. 20 che essi si possono tutti esprimere facilmente per mezzo di $n-1$ fra essi, e precisamente per mezzo di:

$$\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{yz}, \mathcal{D}_{zt}, \ldots, \mathcal{D}_{uv}. \tag{8}$$

Infatti, se nella successione (7) si presenti prima la $p$ e poi la $q$, e la $q$ non sia consecutiva alla $p$, la quale sia invece seguita in (7) da un'altra serie $s$, si avrà primieramente, per le formole citate, l'identità:

$$\mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{sq}\mathcal{D}_{ps} - \mathcal{D}_{ps}\mathcal{D}_{sq}, \tag{8}$$

che ci dà appunto l'espressione voluta se $s$ e $q$ siano consecutive in (7). In caso contrario si sostituirà in (8) in luogo di $\mathcal{D}_{sq}$ l'espressione analoga:

$$\mathcal{D}_{sq} = \mathcal{D}_{rq}\mathcal{D}_{sr} - \mathcal{D}_{sr}\mathcal{D}_{rq}$$

in cui la $r$, serie consecutiva a $s$ in (7), è ancora più vicina a $q$, e così di seguito, finchè si otterrà un'espressione della forma voluta.

28. Considerando p. es. le quattro serie $x, y, z, t$, e quindi le sole operazioni:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{xy}, & \mathcal{D}_{xz}, & \mathcal{D}_{xt} \\ & \mathcal{D}_{yz}, & \mathcal{D}_{yt} \\ & & \mathcal{D}_{zt} \end{array} \tag{9}$$

troviamo, applicando il procedimento indicato, le espressioni seguenti:

$$\mathcal{D}_{xz} = \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}$$
$$\mathcal{D}_{yt} = \mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz} - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{xt} = {} & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt} \\ & + \mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} \\ & - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{xy} \\ & - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz},\end{aligned}$$

mediante le quali le operazioni (9) si possono ridurre alle sole tre $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{yz}, \mathcal{D}_{zt}$.

29. Da quanto si è ora dimostrato segue come corollario: *se una funzione $\varphi(x, y, \ldots, v)$ delle $n$ serie di variabili $x, y, \ldots, v$ soddisfa identicamente alle $n-1$ condizioni:*

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, \quad \mathcal{D}_{yz}\varphi = 0, \quad \mathcal{D}_{zt}\varphi = 0, \quad \ldots, \mathcal{D}_{uv}\varphi = 0 \qquad (10)$$

*essa soddisfa altresì alle equazioni differenziali:*

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0,$$

*ove $p$ è una qualunque delle dette serie e $q$ è una qualunque delle serie che nella successione $x, y, \ldots, v$ si trovano scritte dopo la $p$.*

In particolare se la $\varphi$ soddisfa al sistema (10), soddisferà anche al sistema:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xt}\varphi = 0, \ldots, \mathcal{D}_{xu}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xv}\varphi = 0;$$

onde si vede che al secondo enunciato dato nell'art. 29 si può anche dare la forma seguente: *affinchè una forma algebrica $f(x, y, \ldots, v)$ colle $n$ serie $n^{\text{rie}}$: $x, y, \ldots, v$ sia la potenza $m^{\text{ma}}$ della parentesi $(x\, y \ldots v)$, è necessario e sufficiente che sia dello stesso ordine rispetto*

ad ogni serie, e soddisfi alle $n-1$ equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi=0,\ \mathcal{D}_{yz}\varphi=0,\ \ldots\ldots,\mathcal{D}_{uv}\varphi=0.$$

30. Chiuderemo questo §° con qualche altra osservazione relativa al sistema di tutte le $n^2$ equazioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi=0, \qquad p,q=x,y,z,\ldots,v \tag{11}$$

colle $n$ serie $n^{\text{rie}}$: $x,y,z,\ldots,v$. Applicando a questo sistema com'è manifestamente lecito, in virtù delle relazioni quadratiche già invocate, il teorema di Jacobi, si troverebbe $l-m=0$; cioè non esiste alcuna funzione $\varphi$, la quale non sia che una semplice costante, che soddisfi al sistema. Se però le $n$ serie $x,y,z,\ldots,v$ in luogo di essere $n^{\text{rie}}$ siano serie $\mu^{\text{rie}}$, con $\mu>n$, applicando al sistema (11), come è sempre egualmente lecito, il teorema di Jacobi si trova, essendo in questo caso $l=n\mu$, $m=n^2$, che esso *ammetterà* $n\mu-n^2=n(\mu-n)$ *integrali distinti*.

Vediamo dunque, considerando per semplicità, il caso $n=3$, $\mu=4$, che esistono tre, e soltanto tre funzioni indipendenti delle tre serie quaternarie:

$$x\equiv x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

$$y\equiv y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$$

$$z\equiv z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$$

soddisfacenti al sistema.

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0. \qquad p, q = x, y, z \tag{12}$$

In effetti, colle 12 variabili $x, y, z$ noi possiamo comporre le quattro funzioni $U_1, U_2, U_3, U_4$:

$$\left.\begin{array}{lll} U_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, & -U_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\ & & \\ U_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}, & -U_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \tag{13}$$

che sono fra loro indipendenti e soddisfano evidentemente a tutte le (12), eccettuate le $\mathcal{D}_{xx}\varphi = 0$, $\mathcal{D}_{yy}\varphi = 0$, $\mathcal{D}_{zz}\varphi = 0$. Se però consideriamo i rapporti:

$$\frac{U_2}{U_1}, \quad \frac{U_3}{U_1}, \quad \frac{U_4}{U_1}, \tag{14}$$

abbiamo ancora tre funzioni indipendenti che soddisfano a tutte le (12). Le (14) adunque ci forniscono i tre integrali distinti del sistema (12).

Per riconoscere la indipendenza delle (13), basta riflettere che, indicando con $X_1, Y_1, Z_1, X_2$ etc gli aggiunti di $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots$ nel determinante $\sum \pm x_1 y_2 z_3$ si hanno le relazioni:

$$X_1 x_4 + Y_1 y_4 + Z_1 z_4 = U_1$$
$$X_2 x_4 + Y_2 y_4 + Z_2 z_4 = U_2$$
$$X_3 x_4 + Y_3 y_4 + Z_3 z_4 = U_3$$

con:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = U_4 .$$

---

## §° V. *Carattere invariantivo delle forme polari.*

32. Sia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n ; y_1, y_2, \ldots y_n ; z_1, z_2, \ldots z_n ; \ldots)$ $\equiv f(\overset{\mu}{x} ; \overset{\nu}{y} ; \overset{\rho}{z} ; \ldots)$ una forma algebrica con una o più serie di variabili $n^{ie}$: $x, y, z, \ldots$. Eseguendo sulle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \ldots + \alpha_n x_n' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \ldots + \beta_n x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \ldots + \varepsilon_n x_n' , \end{aligned} \qquad (1)$$

ed eseguendo, nel tempo stesso, sulle serie $y, z, \ldots$, ove esse figurino nella $f$, le trasformazioni cogredienti alla (1):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' , & z_1 &= \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2' + \ldots + \alpha_n z_n' \\ y_2 &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & z_2 &= \beta_1 z_1' + \beta_2 z_2' + \ldots + \beta_n z_n' \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \ldots + \varepsilon_n y_n' & z_n &= \varepsilon_1 z_1' + \varepsilon_2 z_2' + \ldots + \varepsilon_n z_n' \end{aligned} \qquad (2)$$

è chiaro che la $f$ si cangierà in una funzione intera, omogenea e di grado $\nu$ nelle $y_1', y_2', \ldots, y_n'$, etc.; cosicchè potremo scrivere:

$$f(\overset{\mu}{x};\overset{\nu}{y}:\overset{\rho}{z};\ldots)=F(\overset{\mu}{x'},\overset{\nu}{y'},\overset{\rho}{z'},\ldots), \qquad (3)$$

essendo $F$ una forma algebrica i cui coefficienti $A_1, A_2, \ldots$, sono composti *linearmente* coi coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ di $f$.

Dalle (1) e (2) si ricava, qualunque sia il valore del parametro arbitrario $\lambda$:

$$x_1+\lambda y_1=\alpha_1(x_1'+\lambda y_1')+\alpha_2(x_2'+\lambda y_2')+\ldots+\alpha_n(x_n'+\lambda y_n')$$
$$x_2+\lambda y_2=\beta_1(x_1'+\lambda y_1')+\beta_2(x_2'+\lambda y_2')+\ldots+\beta_n(x_n'+\lambda y_n')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n+\lambda y_n=\varepsilon_1(x_1'+\lambda y_1')+\varepsilon_2(x_2'+\lambda y_2')+\ldots+\varepsilon_n(x_n'+\lambda y_n'),$$

onde si vede che i valori di $x_1'+\lambda y_1', x_2'+\lambda y_2', \ldots, x_n'+\lambda y_n'$, sono legati ai valori $x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \ldots x_n+\lambda y_n$ precisamente da quelle stesse relazioni (1) che legano i valori $x'$ ai valori $x$, relazioni che congiunte alle (2), sono sufficienti a rendere soddisfatta l'uguaglianza (3). Si avrà dunque, simultaneamente alla (3):

$$f(x_1+\lambda y_1,\ldots,x_n+\lambda y_n;y;z;\ldots)=F(x_1'+\lambda y_1',\ldots x_n'+\lambda y_n';y';z';\ldots),$$

cioè anche sviluppando (art. 15) col teorema di Taylor:

$$f(x;y;z;\ldots)=\frac{\lambda}{\underline{|1}}\mathcal{D}_{x'y'}F(x';y';z';\ldots)+\frac{\lambda}{\underline{|2}}\mathcal{D}^2_{x'y'}F(x',y';z';\ldots)+\ldots$$

Eguagliando nei due membri i coefficienti di una stessa potenza $k^{ma}$ del parametro arbitrario $\lambda$, si deduce:

$$\mathcal{D}^k_{xy}f(x;y;z;\ldots)=\mathcal{D}^k_{x'y'}F(x';y';z';\ldots). \qquad (4)$$

Questa eguaglianza dimostra il carattere *invariantivo* delle forme polari rispetto alla trasformazione lineare (1) del campo $n^{rio}$ poichè è manifesto che il secondo mem-

bro di (4) è una funzione intera dei coefficienti $A_1, A_2, \ldots$, di $F$ e delle $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n; z'_1, z'_2, \ldots, z'_n; \ldots$ composta con queste qualità assolutamente nello stesso modo col quale il 1° membro è composto coi corrispondenti coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ di $f$ e colle corrispondenti $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; \ldots$

In altri termini, se:

$$\mathcal{D}^k_{xy} f(x; y; z; \ldots) = \varphi(a_1, a_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots)$$

si ha anche

$$\mathcal{D}^k_{x'y'} F(x'; y'; z'; \ldots) = \varphi(A_1, A_2, \ldots; x'_1, \ldots, x'_n; y'_1, \ldots y'_n; \ldots);$$

cosicchè alla (4) si può dare anche la forma:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = \varphi(A_1, A_2, \ldots; x'_1, x'_2, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots; \ldots),$$

che mette del tutto in evidenza il carattere *invariantivo* della funzione $\varphi$ rispetto alla trasformazione lineare del campo $n^{rio}$.

33. Si è supposto nella precedente dimostrazione, per maggior chiarezza, che $f(x; y; z; \ldots)$ sia una forma algebrica. La formola (4) sussiste però qualunque sia la funzione $f$ delle $x, y, z, \ldots$ intendendosi sempre per $F(x'; y'; z'; \ldots)$ ciò che diviene $f$ quando in luogo di $x, y, z, \ldots$ si sostituiscano le loro espressioni (2) e (3). Differenziando, in fatti, la relazione (3) nell'ipotesi che alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si diano degl'incrementi infinitesimi arbitrarii $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, si deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial F}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial F}{\partial x'_2} dx'_2 \ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} dx'_n; \qquad (5)$$

dove le $dx'$ sono legate alle $dx$ dalle relazioni che si ottengono differenziando le (1), cioè:

$$dx_1 = \alpha_1 dx_1' + \alpha_2 dx_2' + \dots + \alpha_n dx_n'$$

$$dx_2 = \beta_1 dx_1' + \beta_2 dx_2' + \dots + \beta_n dx_n'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$dx_n = \varepsilon_1 dx_1' + \varepsilon_2 dx_2' + \dots + \varepsilon_n dx_n'.$$

Ma queste relazioni sono ancora le stesse che quelle che legano le $y$ alle $y'$; onde la (5) sussisterà ancora se in luogo delle $dx$ si pongano le $y$, ed in luogo delle $dx'$ le $y'$; cioè sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n = \frac{\partial F}{\partial x_1'} y_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2'} y_2' + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n'} y_n'.$$

c. d. d.

34. D'ora innanzi colla parola: *operazione di polare* intenderemo non solo le *operazioni di polare elementari* $\mathcal{D}_{pq}$, ma, più generalmente, qualsiasi operazione rappresentabile come un aggregato razionale ed intero delle operazioni di polare elementari. Se $\Delta$ e $\Delta'$ siano due siffatte operazioni, il simbolo di prodotto:

$$\Delta' \Delta,$$

rappresenterà per noi quell'operazione di polare che nasce dall'eseguire prima l'operazione $\Delta$ e poi l'operazione $\Delta'$. Quindi p. es. il simbolo operativo:

$$\mathcal{D}_{xy}(\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx} - \mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy})(\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}),$$

si potrà, volendo, sviluppare, sotto la forma polinomia equiva-

lente:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{xz}\,\mathcal{D}_{zx}\,\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{yz}\,\mathcal{D}_{zx}\\
-&\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{xz}\,\mathcal{D}_{zx}\,\mathcal{D}^2_{xy}\,\mathcal{D}_{yz}\,\mathcal{D}_{zx}\\
-&\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{xz}\,\mathcal{D}_{zx}\,\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{yx}\\
+&\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{xz}\,\mathcal{D}_{zx}\,\mathcal{D}^2_{xy}\,\mathcal{D}_{yx},
\end{aligned}$$

Badando però che in ogni termine del polinomio, non è lecito, in generale, di cambiare l'ordine dei fattori operativi, che s'intendono doversi eseguire l'un dopo l'altro, secondo l'ordine con cui si trovano scritti, andando da destra verso sinistra.

35. Ciò posto, se noi rappresentiamo una certa operazione di polare fra le serie $x, y, z, \ldots$ col simbolo $\Delta(x;y;z;\ldots)$, il simbolo $\Delta(x';y';z';\ldots)$ rappresenterà quella stessa operazione eseguita rispettivamente colle $x', y', z', \ldots$; cosicché il teorema espresso dalla formola (4) dell'art. 32, ha per conseguenza la formola più generale:

$$\Delta(x;y;z;\ldots)f(x;y;z;\ldots) = \Delta(x';y';z';\ldots)F(x';y';z';\ldots).$$

Dalle formole (4) segue in fatti, p. es. applicando successivamente la formola stessa:

$$\mathcal{D}^h_{yx}[\mathcal{D}^k_{xy}f] = \mathcal{D}^h_{y'x'}[\mathcal{D}^k_{x'y'}F]$$

ed applicando la stessa formola, introducendo però la serie $n^{ia}$ e cogrediente $z$:

$$\mathcal{D}^l_{xz}[\mathcal{D}^h_{yx}\{\mathcal{D}^k_{xy}f\}] = \mathcal{D}^l_{x'z}[\mathcal{D}^h_{y'x'}\{\mathcal{D}^k_{x'y'}F\}] \quad ,$$

il che si scriverà più brevemente, secondo le convenzioni fatte:

$$\mathcal{D}_{xz}^{l}\,\mathcal{D}_{yx}^{h}\,\mathcal{D}_{xy}^{k} f = \mathcal{D}_{x'y'}^{l}\,\mathcal{D}_{y'x'}^{h}\,\mathcal{D}_{x'y'}^{k} F.$$

ecc.

---

## §.VI. *Trasformazione di forme lineari. Serie di variabili controgredienti.*

36. Sia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ una form lineare (cioè del prim'ordine nell'unica serie $x$ del campo $n^{\text{rio}}$). Noi la denoteremo più brevemente con $a_x$; poi d'ora innanzi definiremo:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \,,$$

cosicchè, se $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono altri coefficienti ed $y_1, \ldots, y_n$ un'altra serie di variabili, s'intenderà similmente:

$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n$$

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n \,, \text{ ecc.}$$

37. Ciò premesso, eseguiamo, come al §. precedente, la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \cdots + \beta_n x_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \cdots + \varepsilon_n x_n' \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella forma lineare $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, questa si cangerà in una forma pure

neare:

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = a_1' x_1' + \cdots + a_n' x_n',$$

cosicchè si avrà:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = a_1' x_1' + a_2' x_2' + \cdots + a_n' x_n', \qquad (3)$$

o anche, colla notazione abbreviata:

$$a_x = a'_{x'} .$$

Poichè la (3) deve ridursi ad una identità nelle $x'$ quando in luogo delle $x$ si sostituiscono l'espressioni (2), deve essere:

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \cdots + \varepsilon_1 a_n \\ a_2' &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_2 a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n' &= \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n . \end{aligned} \qquad (4)$$

Di qui si vede che i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non si trasformano nei coefficienti $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ colla stessa sostituzione lineare (2) con cui le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si cambiano nelle $x_1', x_2', \ldots, x_n'$. Infatti, se così fosse la sostituzione lineare (2) dovrebbe coincidere col sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \varepsilon_1 x_n \\ x_2' &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_2 x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n . \end{aligned} \qquad (5)$$

Invece, se risolviamo queste equazioni rispetto alle $x$, troviamo delle espressioni in coefficienti generalmen-

te parlando, differenti da quelli delle espressioni (2). La sostituzione (5) in cui le $x$ sono le variabili primitive e le $x'$ le trasformate si dice controgrediente alla (2); e conformemente a ciò, se una serie $x$ si trasforma colla (2), ed un'altra serie $u$ secondo le (5), la serie $u$ si dirà controgrediente alla serie $x$.

Pertanto: *i coefficienti di una forma lineare si possono riguardare come una serie di variabili controgrediente alla serie delle variabili contenute nella forma lineare.*

Da questo risultato si può anche dare la forma equivalente (come appare dalle (5)): *se due serie controgredienti fra loro, $x_1, \ldots, x_n$ ed $u_1, \ldots, u_n$ si trasformano rispettivamente in $x'_1, \ldots, x'_n$ ed in $u'_1, \ldots, u'_n$, si ha la relazione:*

$$x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = x'_1 u'_1 + \ldots + x'_n u'_n .$$

38. La sostituzione (5), risoluta rispetto alle $x$, prende la forma equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha}_1 x'_1 + \bar{\alpha}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\alpha}_n x'_n \\ x_2 &= \bar{\beta}_1 x'_1 + \bar{\beta}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\beta}_n x'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \bar{\varepsilon}_1 x'_1 + \bar{\varepsilon}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_n x'_n , \end{aligned} \qquad (5')$$

dove $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ ; $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n$ ; $\ldots$ ; $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$, sono rispettivamente gli elementi reciproci degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$;

$, \beta_2, \ldots$ nella matrice:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_n \end{matrix}$$

ve sono rispettivamente gli aggiunti di $\alpha_1, \ldots; \beta_1$ etc di si per il determinante della matrice. Paragonando le (5') lle (2), si vede che la trasformazione controgrediente ad na data, potrebbe anche chiamarsi opportunamente la sua *cipraca*.

Si ponga attenzione a non confondere la trasformazio e controgrediente, o reciproca, della (2) colla sua *inversa*, e è la stessa (2) in cui le $x'$ si considerino come variabili initive e le $x$ come le trasformate. La trasformazione versa delle (2) è data dalle formole:

$$x_1 = \bar{\alpha}_1 x_1' + \bar{\beta}_1 x_2' + \ldots + \bar{\varepsilon}_1 x_n'$$
$$x_2 = \bar{\alpha}_2 x_1' + \bar{\beta}_2 x_2' + \ldots + \bar{\varepsilon}_2 x_n'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = \bar{\alpha}_n x_1' + \bar{\beta}_n x_2' + \ldots + \bar{\varepsilon}_n x_n' ,$$

ove $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$, etc hanno lo stesso significato di prima).

). Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una funzione qualunque del variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ed $F(x_1', \ldots, x_n')$ la funzione in i essa si cambia colla trasformazione lineare (2), la re zione (art. 33):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n = \frac{\partial F}{\partial x_1'} y_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2'} y_2' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n'} y_n' ;$$

ci dice, sostituendo in luogo delle $y$ le loro espressioni nelle $y'$ ed identificando rispetto alle $y'$, che: *le derivate* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *della funzione primitiva, rispetto alle variabili primitive, sono legate alle derivate* $\frac{\partial F}{\partial x'_1}, \frac{\partial F}{\partial x'_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x'_n}$, *della funzione trasformata, rispetto alle variabili trasformate, dalla sostituzione lineare controgrediente a quella che trasforma le $x$ nelle $x'$.*

40. Di qui segue come corollario importante che: *il determinante Jacobiano di $n$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ ha carattere invariantivo.* E precisamente, se eseguendo la sostituzione lineare (2) le $f_1, f_2, \ldots, f_n$, si cambiano rispettivamente nelle $F_1, F_2, \ldots, F_n$ delle $x'_1, \ldots, x'_n$ si ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x'_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix} = (\alpha\beta\ldots\varepsilon) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Infatti, se:

$$a \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n; \; b \equiv b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; d \equiv d_1, d_2, \ldots, d_n,$$

sono $n$ serie controgredienti alle serie $x$ trasformate colle (2), si ha per le (4) la relazione:

$$(ab\ldots d) = (\alpha\beta\ldots\varepsilon)^{-1}(a'b'\ldots d'),$$

che fa riscontro alla relazione da noi già trovata:

$$(x\,y\ldots t)=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)(x'y'\ldots t'),$$

che valeva per le serie di variabili $y,\ldots,t$ cogredienti alla serie $x$.

---

## §.VII. *Relazioni identiche fra forme lineari.*

41. Con una serie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di variabili $n^{\text{rie}}$ e con una serie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di coefficienti $n^{\text{rie}}$, si può comporre la forma lineare:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n ,$$

che si dirà anche spesso: *un elemento lineare di specie* $n^{\text{ria}}$ (*)

Con $r$ serie di coefficienti affatto arbitrarii:

$$a \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n \,;\; b \equiv b_1, b_2, \ldots, b_n \,;\ldots\ldots;\, e \equiv e_1, e_2 \ldots, e_n ,$$

e con $\rho$ serie di variabili $x, y, \ldots, z$, pure affatto arbitrarie si possono comporre $r.\rho$ elementi lineari:

$$\begin{matrix} a_x, & b_x, & \ldots, & e_x \\ a_y, & b_y, & \ldots, & e_y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_z, & b_z, & \ldots, & e_z \end{matrix} \qquad (1)$$

---

(*) La locuzione: *forma algebrica* $n^{\text{ria}}$, o *di specie* $n^{\text{ria}}$ equivale alla locuzione: *forma algebrica di specie* $(n-1)^{\text{esima}}$, che è più in uso nelle applicazioni geometriche. Per es. la specie *binaria* si chiama anche *prima specie*, la *ternaria* si chiama anche *seconda specie* etc. La differenza di desinenza *aria* oppure *esima* impedisce del resto qualunque equivoco.

ed importa stabilire in quali casi essi siano fra loro ind
pendenti.

42. *Gli elementi lineari che si possono formare con s serie di coefficienti arbitrarii, e $\rho$ serie di variabili i dipendenti di specie $n^{ria}$ sono fra loro indipendenti quando almeno uno dei due numeri $r$ e $\rho$ è $\geqq n$.*

In altri termini: fissato ad arbitrio un sistema di r quantità:

$$\alpha_1, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1r}$$
$$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2r}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{\rho 1}, \alpha_{\rho 2}, \ldots, \alpha_{\rho r}$$

diciamo primieramente che si potranno sempre determ re le arbitrarie $a_i, b_i, \ldots; x_i, y_i \ldots; (i = 1, 2, \ldots n)$ in m do da avere:

$$a_x = \alpha_{11}, \quad b_x = \alpha_{12}, \ldots, \quad e_x = \alpha_{1r}$$
$$a_y = \alpha_{21}, \quad b_y = \alpha_{22}, \ldots, \quad e_y = \alpha_{2r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_z = \alpha_{\rho 1}, \quad b_z = \alpha_{\rho 2}, \ldots, \quad e_z = \alpha_{\rho r}.$$

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che sia $r \geqq$ Prenderemo, per tutti i valori di $i$ che sono superiori $r$: $a_i = b_i = \cdots = e_i = 0$, e fisseremo, in un modo qualu que, i valori di $a_i, b_i, \ldots e_i$ per $i \leqq r$, purchè si abbia rò:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1 & e_2 & \dots & e_r \end{vmatrix} \neq 0$$

il che evidentemente è sempre possibile. Allora le $r$ equazioni lineari fra le $r$ incognite $x_1, x_2, \dots, x_r$:

$$a_x = \alpha_1 \ , \ b_x = \alpha_{12} \ , \ \dots\dots , e_x = \alpha_{1r} \ ,$$

si potranno sempre risolvere ricavando per le $x_1, x_2, \dots, x_r$ certi valori *finiti* e *ben determinati*. Similmente si potranno determinare in un modo unico i valori finiti delle $y_1, \dots, y_r$ che rendono soddisfatte le equazioni.

$$a_y = \alpha_{21} \ , \ b_y = \alpha_{22} \ , \ \dots , e_y = \alpha_{2r} \ ,$$

e così di seguito finchè si saranno soddisfatte tutte le equazioni (2), come appunto si voleva.

43. *Se i due numeri $\rho$ ed $r$ sono entrambi maggiori di $n$, fra gli $r\rho$ elementi lineari considerati nell'art. 41 hanno luogo precisamente $(r-n)(\rho-n)$ relazioni distinte.*

Poichè $r$ e $\rho$ sono entrambi maggiori di $n$, indichiamo con $x, y, \dots, z$ un gruppo di $n$ serie di variabili $n^{\text{ie}}$ scelte a piacere fra le date, e con $\xi, \eta, \dots$, le rimanenti $\rho - n$ serie. Similmente separiamo, in un modo qualunque, $n$ serie di coefficienti che indicheremo con $\alpha, \beta, \dots$.

Allora è agevole riconoscere che uno qualunque degli $(r-1)$ $(\rho-n)$ elementi lineari che si possono formare combinan le $(r-n)$ serie di coefficienti $\alpha, \beta, \ldots$, colle $\rho-n$ serie di riabili $\xi, \eta, \ldots$, si può esprimere in funzione di eleme tutti diversi dagli $(r-n)(\rho-n)$ ora considerati. In fatt se $\theta$ è una qualunque delle $\xi, \eta, \ldots$, e $\gamma$ una qualun delle $\alpha, \beta, \ldots$, si avrebbe identicamente, per la regola prodotto di due determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \cdots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y & \cdots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z & \cdots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta & \cdots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & e_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & e_2 & \gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & & e_n & \gamma_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \cdots & e_{n+1} & \gamma_{n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 & \theta_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \cdots & z_n & \theta_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} & \cdots & z_{n+1} & \theta_{n+1} \end{vmatrix} \quad ($$

quando gli elementi lineari del primo membro fossero della specie $(n+1)^{\text{aria}}$; epperò essendo essi della specie $n^a$ si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \cdots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y & \cdots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z & \cdots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta & \cdots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

giacchè, per passare a questo caso, basterà porre in (3)

$$a_{n+1} = b_{n+1} = \cdots = e_{n+1} = \gamma_{n+1} = 0$$

$$x_{n+1} = y_{n+1} = \cdots = z_{n+1} = \theta_{n+1} = 0 .$$

Ora l'identità (4) ci dice appunto che $\gamma_\theta$ si esprime in funzione di elementi che non sono formati dalla combinazione delle serie $\alpha, \beta, \ldots$, colle serie $\xi, \eta, \ldots$. Separati, dall'insieme degli $r \cdot \rho$ elementi lineari, gli $(r-n)(\rho-n)$ elementi $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \ldots, \beta_\xi, \beta_\eta, \ldots$, sarà poi facile persuadersi, con un procedimento affatto analogo a quello tenuto nell'art. prec., che fra gli elementi residui non può aver luogo alcuna relazione, e che, per conseguenza, le $(r-n)(\rho-n)$ relazioni (4) sono le sole che hanno luogo fra gli $r\rho$ elementi dati.

44. Prendendo p. es. $r=3$, $\rho=3$, $n=2$, si vede che fra i nove elementi lineari binarii:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 , \quad a_y , \quad a_z$$
$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 , \quad b_y , \quad b_z$$
$$c_x \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2 , \quad c_y , \quad c_z$$

ha luogo una relazione identica, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

---

## §. VIII. *Espressione simbolica di una forma $n^{ria}$ qualunque e delle sue polari.*

45. Sia $f(x_1, \ldots, x_n)$ una forma $n^{ria}$ di ordine $m$ coll'unica serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La sua espressione generale sarà:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

dove $A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ indica il coefficiente costante di quel t
mine della $f$ in cui le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si trovano elevate r
spettivamente agli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Nulla c'impedisce di porre:

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} = \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \ldots \lfloor\alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \qquad (2)$$

e di scrivere, per conseguenza,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \ldots \lfloor\alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Chiameremo questa seconda espressione di $f$ espressione preparata, ed i coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ coefficienti preparat di $f$.

Ciò posto, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono simboli per se stessi p vi di significato e con una moltiplicazione puramente formale componiamo il prodotto $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, nulla ci ta di adottare questo prodotto come una notazione atta rappresentare il coefficiente $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, cioè di porre si bolicamente:

$$\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

giacchè questi prodotti (per $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$) presen no precisamente tante forme distinte quanti sono i va coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ da rappresentarsi. Scriveremo pertanto:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \ldots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Ma per il teorema del polinomio si avrebbe identicamente (qualora le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero dei numeri):

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^m.$$

Potremo dunque scrivere simbolicamente:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n)^m, \tag{4}$$

o anche, colla notazione abbreviata:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_x^m,$$

intendendo con ciò che, fatto lo sviluppo della potenza $a_x^m$, si dovrà sostituire ad ogni prodotto di grado $m$ del tipo $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ il valore $\bar{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ per avere la vera effettiva espressione di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

46. Operando sulla espressione simbolica di $f$ come se essa fosse una vera potenza $m^{\text{esima}}$, si troverà (art. 15):

$$\mathcal{D}_{xy} f = m a_x^{m-1} a_y,$$

ed applicando ancora una volta l'operazione $\mathcal{D}_{xy}$:

$$\mathcal{D}_{xy}^2 f = m(m-1) a_x^{m-2} a_y^2,$$

ed in generale:

$$\mathcal{D}_{xy}^k f = m(m-1) \ldots (m-k+1) a_x^{m-k} a_y^k. \tag{5}$$

Ora questa espressione simbolica di $\mathcal{D}_{xy}^k f$ si può ammettere precisamente secondo lo stesso significato col quale si è ammessa la (4), poichè è agevole riconoscere che, se si

ci dice, sostituendo in luogo delle $y$ le loro espressioni e la $y'$ ed identificando rispetto alle $y'$, che: *le derivate* $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *della funzione primitiva, rispetto alle variabili primitive, sono legate alle derivate* $\frac{\partial F}{\partial x'_1}, \frac{\partial F}{\partial x'_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x'_n}$, *della funzione trasformata, rispetto alle variabili trasformate, dalla sostituzione lineare contragrediente a quella che trasforma le $x$ nelle $x'$.*

40. Di qui segue come corollario importante che: *il determinante Jacobiano di $n$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ ha carattere invariantivo. E precisamente, se eseguendo la sostituzione lineare (2) le $f_1, f_2, \ldots, f_n$, si cambiano rispettivamente nelle $F_1, \ldots, F_n$ delle $x'_1, \ldots, x'_n$ si ha:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x'_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix} = (\alpha\beta\ldots\varepsilon) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Infatti, se:

$$a \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n ; b \equiv b_1, b_2, \ldots, b_n ; \ldots ; d \equiv d_1, d_2, \ldots, d_n ,$$

sono $n$ serie contragredienti alle serie $x$ trasformate con le (2), si ha per le (4) la relazione:

$$(a\,b\ldots d) = (x\beta\ldots\varepsilon)^{-1}(a'b'\ldots d'),$$

che fa riscontro alla relazione da noi già trovata:

$$(x\,y\ldots t)=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)(x'y'\ldots t'),$$

che valeva per le serie di variabili $y,\ldots,t$ cogredienti alla serie $x$.

---

## §.VII. *Relazioni identiche fra forme lineari.*

41 - Con una serie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di variabili $n^{\text{ie}}$ e con una serie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di coefficienti $n^{\text{ie}}$, si può comporre la forma lineare:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n ,$$

che si dirà anche spesso: un *elemento lineare di specie* $n^{\text{ria}}$ (*)

Con $r$ serie di coefficienti affatto arbitrarii:

$$a \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n \;;\; b \equiv b_1, b_2, \ldots, b_n \;;\ldots\ldots;\; e \equiv e_1, e_2 \ldots, e_n ,$$

e con $\rho$ serie di variabili $x, y, \ldots, z$, pure affatto arbitrarie si possono comporre $r.\rho$ elementi lineari:

$$\begin{array}{l} a_x,\ b_x, \ldots,\ e_x \\ a_y,\ b_y, \ldots,\ e_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_z,\ b_z, \ldots,\ e_z \end{array} \qquad (1)$$

---

(*) La locuzione: *forma algebrica* $n^{\text{ria}}$, o *di specie* $n^{\text{ria}}$ equivale alla locuzione: *forma algebrica di specie* $(n-1)^{\text{esima}}$, che è più in uso nelle applicazioni geometriche. Per es. la specie *binaria* si chiama anche *prima specie*, la *ternaria* si chiama anche *seconda specie* etc. La differenza di desinenza *aria* oppure *esima* impedisce del resto qualunque equivoco.

ed importa stabilire in quali casi essi siano fra loro indipendenti.

42. *Gli elementi lineari che si possono formare con $r$ serie di coefficienti arbitrarii, e $\rho$ serie di variabili indipendenti di specie $n^{ria}$ sono fra loro indipendenti quando almeno uno dei due numeri $r$ e $\rho$ è $\overline{<} n$.*

In altri termini: fissato ad arbitrio un sistema di quantità:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\rho 1}, \alpha_{\rho 2}, \ldots, \alpha_{\rho r} \end{array}$$

diciamo primieramente che si potranno sempre determinare le arbitrarie $a_i, b_i, \ldots; x_i, y_i \ldots; (i = 1, 2, \ldots n)$ in modo da avere:

$$\begin{array}{l} a_x = \alpha_{11}, \quad b_x = \alpha_{12}, \ldots, \quad e_x = \alpha_{1r} \\ a_y = \alpha_{21}, \quad b_y = \alpha_{22}, \ldots, \quad e_y = \alpha_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_z = \alpha_{\rho 1}, \quad b_z = \alpha_{\rho 2}, \ldots, \quad e_z = \alpha_{\rho r}. \end{array}$$

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che sia $r \overline{<}$ Prenderemo, per tutti i valori di $i$ che sono superiori $r$: $a_i = b_i = \ldots = e_i = 0$, e fisseremo, in un modo qualunque, i valori di $a_i, b_i, \ldots e_i$ per $i \overline{<} r$, purchè si abbia:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1 & e_2 & \dots & e_r \end{vmatrix} \neq 0$$

il che evidentemente è sempre possibile. Allora le $r$ equazioni lineari fra le $r$ incognite $x_1, x_2, \dots, x_r$:

$$a_x = \alpha_1 \,,\quad b_x = \alpha_{12} \,,\ \dots\dots,\ e_x = \alpha_{1r} \,,$$

si potranno sempre risolvere ricavando per le $x_1, x_2, \dots, x_r$ certi valori finiti e ben determinati. Similmente si potranno determinare in un modo unico i valori finiti delle $y_1, \dots, y_r$ che rendono soddisfatte le equazioni.

$$a_y = \alpha_{21} \,,\quad b_y = \alpha_{22} \,,\ \dots,\ e_y = \alpha_{2r} \,,$$

e così di seguito finchè si saranno soddisfatte tutte le equazioni (2), come appunto si voleva.

43. *Se i due numeri $\rho$ ed $r$ sono entrambi maggiori di $n$, fra gli $r\rho$ elementi lineari considerati nell'art. 41 hanno luogo precisamente $(r-n)(\rho-n)$ relazioni distinte.*

Poichè $r$ e $\rho$ sono entrambi maggiori di $n$, indichiamo con $x, y, \dots, z$ un gruppo di $n$ serie di variabili $n^{\text{ie}}$ scelte a piacere fra le date, e con $\xi, \eta, \dots$, le rimanenti $\rho - n$ serie. Similmente separiamo, in un modo qualunque, $n$ serie di coefficienti che indicheremo con $\alpha, \beta, \dots$.

Allora è agevole riconoscere che uno qualunque degli $(r-n)(\rho-n)$ elementi lineari che si possono formare combinando le $(r-n)$ serie di coefficienti $\alpha, \beta, \ldots$, colle $\rho-n$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$, si può esprimere in funzione di elementi tutti diversi dagli $(r-n)(\rho-n)$ ora considerati. Infatti, se $\theta$ è una qualunque delle $\xi, \eta, \ldots$, e $\gamma$ una qualunque delle $\alpha, \beta, \ldots$, si avrebbe identicamente, per la regola del prodotto di due determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \cdots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y & \cdots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z & \cdots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta & \cdots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & e_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & e_2 & \gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & & e_n & \gamma_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \cdots & e_{n+1} & \gamma_{n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 & \theta_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \cdots & z_n & \theta_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} & \cdots & z_{n+1} & \theta_{n+1} \end{vmatrix} \tag{3}$$

quando gli elementi lineari del primo membro fossero della specie $(n+1)^{\text{azia}}$; epperò essendo essi della specie $n^{\text{azia}}$, si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \cdots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y & \cdots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z & \cdots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta & \cdots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

giacchè, per passare a questo caso, basterà porre in (3):

$$a_{n+1} = b_{n+1} = \cdots = e_{n+1} = \gamma_{n+1} = 0$$

$$x_{n+1} = y_{n+1} = \cdots = z_{n+1} = \theta_{n+1} = 0 . \tag{4'}$$

Ora l'identità (4) ci dice appunto che $\gamma_\theta$ si esprime in funzione di elementi che non sono formati dalla combinazione delle serie $\alpha, \beta, \ldots$, colle serie $\xi, \eta, \ldots$ Separati, dall'insieme degli $r \cdot \rho$ elementi lineari, gli $(r-n)(\rho-n)$ elementi $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \ldots, \beta_\xi, \beta_\eta, \ldots$, sarà poi facile persuadersi, con un procedimento affatto analogo a quello tenuto nell'art. prec., che fra gli elementi residui non può aver luogo alcuna relazione, e che, per conseguenza, le $(r-n)(\rho-n)$ relazioni (4) sono le sole che hanno luogo fra gli $r\rho$ elementi dati.

44. Prendendo p. es. $r=3$, $\rho=3$, $n=2$, si vede che fra i nove elementi lineari binarii:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 \,, \qquad a_y \,, \qquad a_z$$
$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 \,, \qquad b_y \,, \qquad b_z$$
$$c_x \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2 \,, \qquad c_y \,, \qquad c_z$$

ha luogo una relazione identica, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

---

## §. VIII. *Espressione simbolica di una forma $n^{ria}$ qualunque e delle sue polari.*

45. Sia $f(x_1, \ldots, x_n)$ una forma $n^{ria}$ di ordine $m$ coll'unica serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La sua espressione generale sarà:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

dove $A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ indica il coefficiente costante di quel termine della $f$ in cui le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si trovano elevate rispettivamente agli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Nulla c'impedisce di porre:

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} = \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \, \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \qquad (2)$$

e di scrivere, per conseguenza,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \, \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}. \qquad (3)$$

Chiameremo questa seconda espressione di $f$ *espressione preparata*, ed i coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ *coefficienti preparati* di $f$.

Ciò posto, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono simboli per se stessi privi di significato e con una moltiplicazione *puramente formale* componiamo il prodotto $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, nulla ci vieta di adottare questo prodotto come una *notazione atta* a rappresentare il coefficiente $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, cioè di porre simbolicamente:

$$\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

giacchè questi prodotti (per $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$) presentano precisamente tante forme distinte quanti sono i nuovi coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ da rappresentarsi. Scriveremo pertanto:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \ldots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Ma per il teorema del polinomio si avrebbe identicamente (qualora le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero dei numeri):

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^m.$$

Potremo dunque scrivere simbolicamente:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n)^m, \tag{4}$$

o anche, colla notazione abbreviata:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_x^m,$$

intendendo con ciò che, fatto lo sviluppo della potenza $a_x^m$, si dovrà sostituire ad ogni prodotto di grado $m$ del tipo $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ il valore $\bar{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ per avere la vera effettiva espressione di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

46. Operando sulla espressione simbolica di $f$ come se essa fosse una vera potenza $m^{\text{esima}}$, si troverà (art. 15):

$$\mathcal{D}_{xy} f = m a_x^{m-1} a_y,$$

ed applicando ancora una volta l'operazione $\mathcal{D}_{xy}$:

$$\mathcal{D}_{xy}^2 f = m(m-1) a_x^{m-2} a_y^2,$$

ed in generale:

$$\mathcal{D}_{xy}^k f = m(m-1)\ldots(m-k+1) a_x^{m-k} a_y^k. \tag{5}$$

Ora questa espressione simbolica di $\mathcal{D}_{xy}^k f$ si può ammettere precisamente secondo lo stesso significato col quale si è ammessa la (4), poichè è agevole riconoscere che, se si

sviluppasse il prodotto $a_x^{m-k} a_y^k$ e si sostituisse quindi ad ogni prodotto simbolico $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$, del grado $m$ nelle $a_1, \ldots, a_n$, il suo significato effettivo, cioè $\bar{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$, il secondo membro della (5) sarebbe precisamente $\mathcal{D}_{xy}^k f$ calcolato colla (3); cioè coinciderebbe identicamente con:

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \, \lfloor \alpha_2 \cdots \lfloor \alpha_n} \cdot \bar{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \cdot \mathcal{D}_{xy}^k \left[ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \right].$$

Infatti, il procedimento tenuto per giungere alla (5) sarebbe certamente legittimo, se le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero dei numeri, cioè se la $f$ fosse effettivamente la potenza $m^{esima}$ di una funzione lineare delle $x$. Dunque, se le $a_1, \ldots, a_n$ significassero dei numeri si avrebbe identicamente:

$$m(m-1) \ldots (m-k+1) a_x^{m-k} a_y^k = \sum_{\alpha_1 + \cdots \alpha_n = m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \, \lfloor \alpha_2 \cdots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \mathcal{D}_{xy}^k \left[ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \right]$$

Ora ciò dimostra l'asserto, poichè abbiamo appunto definito il significato del secondo membro di (5) nel senso che si debba sviluppare $a_x^{m-k} a_y^k$ come se le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero delle effettive variabili indipendenti (con che si cadrà necessariamente, per quanto si è testè notato, nella espressione (5) e sostituire quindi ad ogni prodotto simbolico $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$ del grado $m$ nelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il corrispondente valore effettivo $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$.

47. Se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ è una novella serie di variabili indipendenti dalle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e dalle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, si pu

verebbe con identico ragionamento la legittimità della formola:

$$\mathcal{D}_{xz}^{h}\,\mathcal{D}_{xy}^{k} f = m(m-1)\cdots(m-h-k+1)\,a_x^{m-h-k}\,a_y^{k}\,a_z^{k}.$$

Fatta astrazione dai coefficienti numerici, vediamo dunque che le varie forme polari con un numero qualunque di nuove serie di variabili $y$, $z$, $t$ etc. sono tutte comprese nel tipo:

$$a_x^{\alpha}\,a_y^{\beta}\,a_z^{\gamma}\cdots a_t^{\lambda} \qquad , \quad (\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m) \qquad (7)$$

e che, reciprocamente, ogni espressione simbolica del tipo (7) rappresenta una forma polare (semplice o mista) della stessa forma fondamentale $f \equiv a_x^m$.

48. Per una forma algebrica con più serie di variabili si può adottare una rappresentazione simbolica affatto analoga. In vero, il coefficiente del termine generale:

$$x_1^{m_1}\,x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\,y_1^{\mu_1}\,y_2^{\mu_2}\cdots y_n^{\mu_n}\cdots z_1^{\nu_1}\,z_2^{\nu_2}\cdots z_n^{\nu_n},$$

di una forma algebrica $f(x^m; y^{\mu}; \ldots; z^{\nu})$ con $\rho$ serie di variabili $n^{ie}$: $x, y, \ldots, z$, può sempre assumersi sotto la forma:

$$\frac{\lfloor m}{\lfloor m_1\,\lfloor m_2\cdots\lfloor m_n}\cdot\frac{\lfloor \mu}{\lfloor \mu_1\,\lfloor \mu_2\cdots\lfloor \mu_n}\cdot\cdots\cdot\frac{\lfloor \nu}{\lfloor \nu_1\,\lfloor \nu_2\cdots\lfloor \nu_n}\cdot\bar{A}_{m_1 m_2\cdots m_n;\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\cdots;\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

dove $\bar{A}_{m_1 m_2\cdots m_n;\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$ (il coefficiente *preparato*) è una costante che può determinarsi ad arbitrio per ogni sistema di esponenti $m_1, m_2, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots$. Possiamo dunque rappresentarlo col simbolo:

$$a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}\,b_1^{\mu_1}\,b_2^{\mu_2}\cdots b_n^{\mu_n}\cdots\cdots c_1^{\nu_1}\,c_2^{\nu_2}\cdots c_n^{\nu_n}, \qquad (8)$$

che prende precisamente tante forme distinte quanti sono i detti sistemi di esponenti. I simboli $a, b, \ldots e$ non avranno significato per se stessi, ma soltanto nei composti del tipo (8) soddisfacenti alle condizioni:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m\,;\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \mu\,;\ \ldots\ldots;\ \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n = \nu.$$

Da questa rappresentazione simbolica de' coefficienti ne discende per l'intera funzione la seguente:

$$f(x^m; y^\mu, \ldots; z^\nu) = [a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n]^m \cdot [b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n]^\mu \cdot \ldots \cdot [e_1 z_1 + \ldots e_n z_n]^\nu =$$
$$= a_x^m\, b_y^\mu \ldots e_z^\nu,$$

poichè, se si sviluppa l'espressione del secondo membro secondo le regole ordinarie e ad ogni prodotto di $m + \mu + \cdots + \nu$ simboli si sostituisce quel valore $\bar{A}$ che esso rappresenta, si ricade identicamente nella forma data $f$.

48. Operando, analogamente a quanto si è fatto all'art. 46, sulla espressione simbolica di $f$:

$$a_x^m\, b_y^\mu \ldots e_z^\nu,$$

come se fosse un prodotto di potenze effettive, con un'operazione di polare qualsivoglia (art. 34):

$$\Delta(x; y; \ldots; t; \ldots)$$

fra le serie di variabili $x, y, \ldots, z$ ed anche altre nuove serie $t, u, \ldots$, ove si voglia, si otterrà come risultato una somma di termini

$$\sum C \cdot P,$$

dove $C$ è un coefficiente costante e $P$ un prodotto di elementi lineari *simbolici* scelti, *una o più volte*, fra gli elementi:

$$\begin{array}{l} a_x,\ a_y, \ldots, a_z,\ a_t, \ldots \\ b_x,\ b_y, \ldots, b_z,\ b_t, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_x,\ e_y, \ldots, e_z,\ e_t, \ldots \end{array} \qquad (10)$$

Il prodotto $P$ avrà significato effettivo, poichè esso riuscirà omogeneo e del grado $m$ nei simboli $a$, omogeneo e del grado $\mu$ nei simboli $b$ etc; e sostituendo in (9) in luogo delle $P$ le loro espressioni effettive, la somma (9) verrà a coincidere coll'espressione $\Delta f$ che si sarebbe ottenuta operando con $\Delta$ sull'espressione effettiva di $f$.

Reciprocamente: *Ogni prodotto $P$ composto nel modo indicato cogli elementi lineari simbolici (10) e quindi suscettibile di avere un significato effettivo, rappresenterà una polare di $f$, cioè una forma algebrica deducibile da $f$ con un'operazione di polare opportunamente scelta.* La dimostrazione di questo teorema, affatto ovvia nel caso in cui $f$ conteneva come all'art. 47 una sola serie di variabili, è assai meno facile quando $f$ contiene, come ora supponiamo, un numero qualunque di serie di variabili. Per dimostrarlo dobbiamo premettere alcuni altri teoremi di indo-

le generale sul calcolo delle polari, e stabilire un metodo che chiameremo *delle variabili ausiliarie* (di cui ci serviremo poi anche in altre circostanze) mediante il quale non solo dimostreremo la possibilità di dedurre $P$ da $f$ mediante operazioni di polare, ma indicheremo al tempo stesso la via per costruire effettivamente l'operazione $\Delta$ per la quale si abbia: $P = \Delta f$.

---

## §.IX *Alcuni teoremi sul calcolo con operazioni di polare.*

49. *Sia $\Delta$ un'operazione di polare monomia del grado $\lambda$, cioè il prodotto di $\lambda$ operazioni elementari: $\mathcal{D}_{xx}$, $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{yz}$, .... formate con certe $k$ serie di variabili $x, y, z, \ldots$; e sia $\nabla$ un'operazione di polare che differisca da $\Delta$ soltanto per l'ordine dei fattori. La differenza $\nabla - \Delta$ si può esprimere identicamente sotto forma di un'operazione di polare di grado non superiore a $\lambda$.*

Così ad esempio, la differenza:

$$\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{xy}^2\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zx},$$

si può esprimere come una somma di operazioni monomie di grado non superiore al quinto.

Infatti, il passaggio dall'ordinamento $\Delta$ all'ordinamento $\nabla$ si può effettuare mediante un numero finito di scambii di due fattori *consecutivi*, cosicchè esisterà un

numero finito di operazioni monomie: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_h$ tali che se nella successione di operazioni:

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{h-1}, \Delta_h, \nabla, \qquad (1)$$

ne consideriamo due qualunque consecutive, esse differiscano soltanto per lo scambio di due operazioni elementari consecutive.

Applicando le relazioni fondamentali dell'art. 20 si potrà quindi evidentemente scrivere:

$$\Delta - \Delta_1 = Q_1$$
$$\Delta_1 - \Delta_2 = Q_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\Delta_{h-1} - \Delta_h = Q_h$$
$$\Delta_h - \nabla = Q_{h+1}$$

essendo le $Q$ operazioni di polare di grado inferiore a quello delle (1). E sommando queste identità membro a membro si avrà appunto:

$$\Delta - \nabla = \sum Q,$$

dove il secondo membro è un'operazione di polare di grado inferiore a $\lambda$.

50. Siano

$$\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_{\nu-1}, \mathcal{D}_{\nu-2}, \ldots, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1 \qquad (2)$$

le $\nu$ $(\nu = k^2)$ operazioni di polare elementari $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{xz}, \ldots$, che si possono formare con certe $k$ serie di variabili $x, y, z, \ldots$ scritte secondo un ordine fis-

sato a piacere. Ogni operazione di polare (art. 34) $\Delta(x, y, z, \ldots)$ composta con queste serie è equivalente ad un'altra espressione della forma:

$$\sum A \mathcal{D}_{\nu}^{\alpha_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} \ldots\ldots \mathcal{D}_3^{\alpha_3} \mathcal{D}_2^{\alpha_2} \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \qquad (3)$$

in cui le $A$ sono dei coefficienti costanti, e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ degli esponenti interi e positivi, la cui somma non supera mai il grado di $\Delta(x, y, z, \ldots)$.

Per grado di $\Delta$ intendiamo il massimo grado che si riscontra nei termini di $\Delta$; e per grado di un termine di $\Delta$ intenderemo naturalmente il numero delle operazioni elementari di cui esso è il prodotto.

Questo teorema è evidente per le operazioni $\Delta$ di primo grado. Pertanto possiamo supporre di averlo già dimostrato per le operazioni $\Delta$ di grado $\lambda-1$, e basterà far vedere che esso sussiste anche per le operazioni $\Delta$ di grado $\lambda$.

Sia infatti $\Delta$ un'operazione monomia del grado $\lambda$ e sia $\Delta'$ la stessa operazione $\Delta$ nella quale però i $\lambda$ fattori operativi elementari siano stati disposti secondo l'ordinamento prefissato (1). La differenza:

$$\Delta - \Delta' \equiv \Delta - \mathcal{D}_{\nu}^{\beta_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}} \ldots\ldots \mathcal{D}_3^{\beta_3} \mathcal{D}_2^{\beta_2} \mathcal{D}_1^{\beta_1}$$

potendosi porre, secondo il teorema dell'art. prec., sotto forma di un'operazione di polare di grado non superiore a $\lambda-1$, possiamo scrivere:

$$\Delta - \mathcal{D}_\nu^{\beta_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}} \cdots \mathcal{D}_3^{\beta_3} \mathcal{D}_2^{\beta_2} \mathcal{D}_1^{\beta_1} =$$
$$= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu < \lambda} A \cdot \mathcal{D}_\nu^{\alpha_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} \cdots \mathcal{D}_3^{\alpha_3} \mathcal{D}_2^{\alpha_2} \mathcal{D}_1^{\alpha_1},$$

giacchè per le operazioni di grado inferiore a $\lambda$ abbiamo supposto già stabilita la forma (3). Dall'ultima eguaglianza si ricava per $\Delta$ un'espressione della forma voluta.

Dal teorema ora dimostrato discendono due corollarii che ci saranno in seguito molto utili.

51. *Se le serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ non sono contenute nella forma $f$ che è soltanto funzione di altre serie di variabili $x, y, z, \ldots$, ogni funzione deducibile da $f$ con un aggregato delle operazioni elementari $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{x\xi}$, $\mathcal{D}_{\xi x}, \ldots$ formate comunque colle variabili dei due gruppi, si può anche dedurre con quelle sole operazioni che hanno per primo indice le variabili $x, y, z, \ldots$.*

Infatti, le operazioni $\mathcal{D}_{pq}$ formabili colle serie di variabili dei due gruppi si possono dividere in due classi, riunendo in una prima classe quelle in cui $p$ è una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, ed in una seconda quelle in cui $p$ è una delle $x, y, z, \ldots$; e pel teorema dell'art. prec., si potrà trasformare ogni operazione $\Delta$ fra le variabili dei due gruppi in una somma di termini della forma $\Delta'' \cdot \Delta'$, dove $\Delta'$ e $\Delta''$ sono prodotti di fattori rispettivamente della

prima e della seconda classe. Ma la $f$ è annullata dalle operazioni della prima classe poichè per ipotesi essa non contiene le variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; quindi $\Delta''\Delta' f$ sarà identicamente nulla, semprechè qualcuno degli esponenti delle operazioni elementari contenute in $\Delta'$ sia diverso da zero. Così $\Delta f$ sarà ridotta ad una somma di soli termini del tipo $\Delta'' f$; c.d.d.

52. *Se con operazioni fra le serie di variabili dei due gruppi $x, y, z, \ldots$ e $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ si deduca da $f(x; y; z; \ldots)$ una funzione $\varphi(x; y; z; \ldots)$ che al pari di $f$ contenga solamente le serie $x, y, z, \ldots$, essa può anche ottenersi direttamente con le sole operazioni fra le $x, y, z, \ldots$.*

Infatti, dopo di aver espresso $\varphi$, come sopra, come una somma di termini del tipo $\Delta'' f$, si osserverà che i soli fattori operativi di $\Delta''$ che contengono le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, le contengono come secondo indice; epperò se il loro esponente non è nullo, essi aggiungono a $\varphi$ dei termini in cui almeno una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ entrerà ad un grado maggiore di zero; tali termini dovranno dunque distruggersi con altri ad essi omogenei, giacchè $\varphi$ contiene le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ al grado zero. Non resteranno dunque che i soli termini dati da quelle $\Delta'' f$ nelle quali le $\Delta''$ non dipendono affatto dalle serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ c.d.d.

## §.X *Metodo delle variabili ausiliarie.*

53. Sia, come al §.8:

$$f(\overset{m}{x}\,;\overset{\mu}{y}\,;\dots;\overset{\nu}{z}) \equiv a_x^m\, b_y^\mu \dots e_z^\nu \qquad (1)$$

la rappresentazione simbolica della $\gamma$ forma algebrica generale con $r$ serie di variabili ($n^{ie}$): $x, y, \dots z$. L'espressione simbolica:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1}\, a_y^{\alpha_2} \dots a_z^{\alpha_r}\, a_\xi^{\alpha_{r+1}} \dots a_\eta^{\alpha_\rho}\, b_x^{\beta_1}\, b_y^{\beta_2} \dots b_z^{\beta_r}\, b_\xi^{\beta_{r+1}} \dots b_\eta^{\beta_\rho} \dots e_x^{\gamma_1}\, e_y^{\gamma_2} \dots e_\eta^{\gamma_\rho}, \qquad (2)$$

rappresenterà una forma algebrica ben determinata $F$, colle $\rho$ serie di variabili $x, y, \dots, z, \xi, \dots, \eta$ semprechè gli esponenti $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ soddisfino alle condizioni:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_\rho = m\,,\ \beta_1 + \dots + \beta_\rho = \mu, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_\rho = \nu\,.$$

Ci proponiamo di costruire un'operazione di polare $\Delta$, fra le $\rho$ serie $x, y, \dots, z, \xi, \dots, \eta$, tale da dare identicamente:

$$F = \Delta \cdot f$$

con che sarà dimostrato che $F$ è una polare di $f$.

Introducendo, infatti, altre $\nu$ serie di variabili ausiliarie $x', y', \dots, z'$, si può scrivere identicamente:

$$a_{x'}^m\, b_{y'}^\mu \dots e_{z'}^\nu = \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \cdots \lfloor \nu}\, \mathcal{D}_{xx'}^m\, \mathcal{D}_{yy'}^n \dots \mathcal{D}_{zz'}^\nu \left\{ a_x^m\, b_y^n \dots e_z^\nu \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \cdots \lfloor \nu}\, \mathcal{D}_{xx'}^m\, \mathcal{D}_{yy'}^\mu \dots \mathcal{D}_{zz'}^\nu\, f\,.$$

D'altra parte, si può anche scrivere identicamente:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1}\, a_y^{\alpha_2} \dots a_\eta^{\alpha_\rho}\, b_x^{\beta_1}\, b_y^{\beta_2} \dots b_\eta^{\beta_\rho} \dots e_x^{\gamma_1}\, e_y^{\gamma_2} \dots e_\eta^{\gamma_\rho} =$$

$$= \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \cdots \lfloor \nu} \cdot \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1}\, \mathcal{D}_{x'y}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho}\, \mathcal{D}_{y'x}^{\beta_1} \dots \mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho} \dots \mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1} \dots \mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho} \left\{ a_{x'}^m\, b_{y'}^n \dots e_{z'}^\nu \right\},$$

onde si ha anche:

$$F \equiv \left(\frac{1}{\underline{|m}\ \underline{|\mu} \cdots \underline{|\nu}}\right)^2 \cdot \nabla \cdot f \qquad (4)$$

dove:

$$\nabla = \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1} \cdots \mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho} \mathcal{D}_{y'z}^{\beta_1} \cdots \mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho} \cdots \mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1} \cdots \mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho} \cdot \mathcal{D}_{xx'}^{m} \mathcal{D}_{yy'}^{n} \cdots \mathcal{D}_{zz'}^{\nu},$$

è un'operazione di polare fra le $\rho$ serie date $x, y, \ldots \eta$ e le $r$ serie ausiliarie $x', y', \ldots, z'$. Queste ultime non sono però contenute nè in $f$ nè in $F$. Esse potranno no quindi *eliminarsi* secondo il teorema del §. preced.te (art. 52), sostituendo col procedimento ivi indicato, all'operazione $\nabla$, un'altra operazione $\Delta$ fra le sole serie date $x, y, \ldots, \eta$, la quale sarà equivalente a $\nabla$ semprechè la si applichi a funzioni delle sole $x, y, \ldots \eta$. L'espressione (4) ci fornirà così l'espressione desiderata del tipo (3).

Esempio I. Proponiamoci, p. es., di dedurre dalla forma fondamentale:

$$f \equiv a_x^2\, b_y^2\, c_z^2$$

la forma

$$F \equiv a_x\, a_y\, b_x\, b_y\, c_x\, c_y\ .$$

Applicando il procedimento generale, affatto simmetrico, da noi indicato, si dovrebbero introdurre tre nuove serie ausiliarie $x', y', z'$, scrivere dapprima $F$ sotto la forma:

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{x'x} \mathcal{D}_{x'y} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{z'x} \mathcal{D}_{z'y} \{ a_{x'}^2 b_{y'}^2 c_{z'}^2 \} =$$
$$= \frac{1}{64} \mathcal{D}_{x'x} \mathcal{D}_{x'y} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{z'x} \mathcal{D}_{z'y} \cdot \mathcal{D}_{xx'}^2 \mathcal{D}_{yy'}^2 \mathcal{D}_{zz'}^2 \cdot f$$

ed eliminare quindi le $x'$, $y'$, $z'$. Nel fatto basterà introdurre una sola serie ausiliaria $y'$, poichè si può scrivere, ne evidentemente:

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yy'} f .$$

Per eliminare ora di qui la serie $y'$ si comincerà con applicare l'identità (art. 20, I'):

$$\mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{y'y}$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{yy'} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{yy'} \right\} f .$$

Si applicheranno quindi le formole:

$$\mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'x} + \mathcal{D}_{yx}$$
$$\mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{y'y'} ,$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'y'} \right\} f$$
$$+ \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yy} \right\} f .$$

Ora, essendo $f$ indipendente dalla serie $y'$, si ha:

$$\mathcal{D}_{y'x} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y'} f = 0$$

onde resta semplicemente (osservando altresì che $\mathcal{D}_{yy} f = 2f$):

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} f - \frac{1}{4} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} f =$$
$$= \frac{1}{4} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} - 1 \right\} f .$$

55. Esempio II. Essendo:

$$f \equiv a_x^3 b_y^2 c_z^2 \quad , \quad F \equiv a_x^2 a_z b_x b_y c_y c_z ,$$

si voglia costruire l'operazione di polare $\Delta$, fra le tre serie $x, y, z$ per la quale si ha $F = \Delta f$.

Anche qui basterà introdurre una sola serie ausiliaria $u$, poichè si può scrivere identicamente:

$$a_x^2 a_z b_x b_y c_y c_z = \frac{1}{12} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \left\{ a_x^3 b_y^2 c_z^2 \right\} .$$

Applicando le formole (I') dell'art. 20 si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{zz} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} .$$

Dipoi si ha, trasformando il primo termine del secondo membro:

$$\mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} + \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu}$$

e trasformando anche il secondo colle formole già citate e colla (I'', art. 20):

$$\mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{xu} =$$
$$= \left\{ \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{uu} \right\},$$

onde si conchiude:

$$\mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx}$$
$$+ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} - \mathcal{D}_{uu}$$

e quindi:

$$F = \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx} \right\} \cdot f$$
$$= \frac{1}{4} f + \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} \cdot f$$

56. Mercè la rappresentazione simbolica delle forme algebriche e la teoria testè svolta, siamo ora in grado

di rispondere alla questione: data la forma algebrica più generale $f(x^{m_1}; y^{m_2}; \ldots; z^{m_r})$ con $r$ serie di variabili $n^{rie}$ $(n \geqq r)$ di dati ordini $m_1, m_2, \ldots, m_r$ rispetto ad ogni serie, qual'è il numero delle sue polari linearmente indipendenti(*) con $\rho$ serie(**) di variabili $F(\xi^{\mu_1}; \eta^{\mu_2}; \ldots; \omega^{\mu_\rho})$ di dati ordini $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$ nelle singole serie?

È chiaro infatti, dopo quanto si è dimostrato, che rappresentato $f$ simbolicamente con:

$$f \equiv a_x^{m_1} b_y^{m_2} \ldots e_z^{m_r}$$

il numero delle polari linearmente indipendenti, che si vuol conoscere, coincide col numero delle forme algebriche linearmente indipendenti del tipo:

$$a_\xi^{\alpha_{11}} a_\eta^{\alpha_{12}} \ldots a_\omega^{\alpha_{1\rho}} b_\xi^{\alpha_{21}} b_\eta^{\alpha_{22}} \ldots b_\omega^{\alpha_{2\rho}} \ldots e_\xi^{\alpha_{r1}} e_\eta^{\alpha_{r2}} \ldots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}, \qquad (5)$$

in cui gli esponenti $\alpha_{ij}$ soddisfano alle condizioni:

$$(6) \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1\rho} = m_1, & \alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{r1} = \mu_1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{2\rho} = m_2, & \alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{r2} = \mu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1} + \alpha_{r2} + \ldots + \alpha_{r\rho} = m_r, & \alpha_{1\rho} + \alpha_{2\rho} + \ldots + \alpha_{r\rho} = \mu_\rho. \end{cases}$$

Ma le forme algebriche del tipo (5) che corrispondono a

---

(*) Fra le quali cioè non abbia luogo alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

(**) Il numero $\rho$ è affatto indipendente da $r$, di cui può anche essere minore; le serie $\xi, \eta, \ldots, \omega$ possono evidentemente anche coincidere tutte, o in parte, colle serie primitive $x, y, \ldots, z$.

sistemi differenti di esponenti $\alpha_{ij}$, sono tutte linearmente indipendenti per $n \geqq r$; giacchè, se fra di esse sussistesse una relazione lineare a coefficienti costanti, questa stessa relazione dovrebbe sussistere in particolare anche nel caso in cui le serie $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$; $\ldots$; $e_1, \ldots, e_n$ avessero significato effettivo, cioè nel caso particolare in cui $f$ fosse il prodotto di forme lineari $a_x, a_x, \ldots, b_y, b_y, \ldots, e_z, e_z \ldots$. Ora ciò è assurdo, poichè gli $r\rho$ elementi lineari che si possono formare colle $r$ serie di coefficienti $a, b, \ldots, r$ e colle $\rho$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \omega$, sono fra loro affatto indipendenti, per $n \geqq r$, secondo quanto si è visto all'art. 42.

Concludiamo adunque che: *il numero delle forme polari linearmente indipendenti* $F(\overset{\mu_1}{\xi}; \overset{\mu_2}{\eta}; \ldots; \overset{\mu_\rho}{\omega})$ *deducibili dalla forma algebrica generale* $f(\overset{m_1}{x}; \overset{m_2}{y}; \ldots; \overset{m_r}{z})$ *è dato dal numero dei sistemi di valori interi e positivi delle* $\alpha_{ij}$ *che risolvono il sistema diofanteo (6)*

57. Il numero dei sistemi di soluzioni ammesse dal problema di partizione (6) si presenta anche in molte altre questioni enumerative attinenti alla teoria delle forme algebriche.(*) Noi lo rappresenteremo col simbolo

---

(*) Cfr. la memoria già citata: *Fondamenti* ecc. 1882. In questa memoria (art. 26 e segg.) il lettore potrà trovare anche ulteriori sviluppi sul metodo delle variabili ausiliarie.

$[m_1, m_2, \ldots, m_r ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho]$ che avrà significato soltanto quando le $m$ e $\mu$ soddisfino alla condizione

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\rho ,$$

giacchè soltanto in questo caso il sistema (6) può ammettere delle soluzioni, come facilmente si vede.

Dalla definizione di questa funzione aritmetica apparisce chiaramente che:

$$[m_1, m_2, \ldots, m_r ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho] = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho ; m_1, m_2, \ldots, m_r].$$

Di più, se $m'_1, m'_2, \ldots, m'_r$ sono gli stessi numeri $m_1, m_2, \ldots, m_r$ scritti in un ordine qualunque e similmente $\mu'_1, \ldots, \mu'_\rho$ è una permutazione qualunque dei numeri $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$, si ha pure manifestamente

$$[m'_1, \ldots, m'_r ; \mu'_1, \ldots, \mu'_\rho] = [m_1, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho].$$

Finalmente notiamo che se taluno degli elementi $m, \mu$ è uguale a zero, esso può trascurarsi. Così:

$$[0, m_2, m_3, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho] = [m_2, m_3, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho].$$

---

## §. XI. *Trasformazione di una forma qualunque mediante la trasformazione lineare dei suoi coefficienti simbolici.*

58. Eseguiamo nella forma algebrica generale di ordine $m$ coll'unica serie $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \cdots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = a_x^m \qquad (1)$$

la solita sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_n x_n' \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n' \end{aligned} \tag{2}$$

che si può anche scrivere, colla notazione abbreviata, così:

$$x_1 = \alpha_{x'} \quad , \quad x_2 = \beta_{x'} , \dots , x_n = \varepsilon_{x'} . \tag{2'}$$

Tale sostituzione si potrà eseguire anche nella espressione simbolica di $f$, cioè si potrà scrivere che:

$$F(x_1', x_2', \dots, x_n') = f(\alpha_{x'}, \beta_{x'}, \dots, \varepsilon_{x'}) = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m , \tag{3}$$

secondo il solito significato della espressione simbolica; poichè l'eguaglianza:

$$\sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \alpha_{x'}^{\alpha_1} \beta_{x'}^{\alpha_2} \dots \varepsilon_{x'}^{\alpha_n} = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m$$

ha luogo certamente per valori effettivi qualsivogliano delle $a_1, a_2, \dots, a_n$, e deve quindi ridursi ad una *identità* quando si sviluppi la potenza $m^{esima}$ al secondo membro e si ordini il risultato secondo i termini distinti $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$.

Ciò premesso, se noi poniamo:

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \varepsilon_1 a_n \\ a_2' &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \varepsilon_2 a_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n' &= \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n \end{aligned} \tag{4}$$

troviamo che:

$$a_1\alpha_{x'}+a_2\beta_{x'}+\cdots+a_n\varepsilon_{x'}=a_1'x_1'+a_2'x_2'+\cdots+a_n'x_n'=a_{x'}'$$

Possiamo dunque anche scrivere in luogo della (3):

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F(x_1',x_2',\ldots,x_n')=\left[a_1'x_1'+a_2'x_2'+\cdots+a_n'x_n'\right]^m=a_{x'}'^{\,m}$$

$$(5)\qquad =\sum\frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1\,\lfloor\alpha_2\cdots\lfloor\alpha_n}\,a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n}\cdot x_1'^{\alpha_1}x_2'^{\alpha_2}\cdots x_n'^{\alpha_n},$$

dove il significato di ogni prodotto simbolico $a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n}$ si deve trovare mediante la (4), cioè sviluppando il prodotto:

$$(\alpha_1a_1+\beta_1a_2+\cdots+\varepsilon_1a_n)^{\alpha_1}(\alpha_2a_1+\beta_2a_2+\cdots+\varepsilon_2a_n)^{\alpha_2}\cdots(\alpha_na_1+\beta_na_2+\cdots+\varepsilon_na_n)^{\alpha_n}$$

e sostituendo ad ogni prodotto simbolico $a_1^{h_1}a_2^{h_2}\cdots a_n^{h_n}$ (in cui $h_1+h_2+\cdots+h_n=m$) il corrispondente valore effettivo $\bar{A}_{h_1,h_2,\ldots h_n}$.

Dunque: se

$$F(x_1',x_2',\ldots,x_n')=\sum\frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1\,\lfloor\alpha_2\cdots\lfloor\alpha_n}\bar{A}'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1'^{\alpha_1}x_2'^{\alpha_2}\cdots x_n'^{\alpha_n}$$

è la trasformata mediante la sostituzione (2) della primitiva forma:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1\,\lfloor\alpha_2\cdots\lfloor\alpha_n}\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

l'espressione del coefficiente trasformato $\bar{A}'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ in funzione dei primitivi coefficienti $A$ sarà data da:

$$\bar{A}'=a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n},$$

quando alle $a_1',a_2',\ldots,a_n'$ si siano sostituite le loro espressioni (4).

59_ Se consideriamo che la sostituzione (4) cambia le $a$ nelle $a'$ con una trasformazione contragrediente (art. 37) alla (2) che cambia le $x$ nelle $x'$, vediamo che quanto si è

prima e della seconda classe. Ma la $f$ è annullata dalle operazioni della prima classe poichè per ipotesi essa non contiene le variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; quindi $\Delta''\Delta' f$ sarà identicamente nulla, semprechè qualcuno degli esponenti delle operazioni elementari contenute in $\Delta'$ sia diverso da zero. Così $\Delta f$ sarà ridotta ad una somma di soli termini del tipo $\Delta'' f$; c.d.d.

52. *Se con operazioni fra le serie di variabili dei due gruppi $x, y, z, \ldots$ e $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ si deduca da $f(x; y; z; \ldots)$ una funzione $\varphi(x; y; z; \ldots)$ che al pari di $f$ contenga solamente le serie $x, y, z, \ldots$, essa può anche ottenersi direttamente con le sole operazioni fra le $x, y, z, \ldots$.*

Infatti, dopo di aver espresso $\varphi$, come sopra, come una somma di termini del tipo $\Delta'' f$, si osserverà che i soli fattori operativi di $\Delta''$ che contengono le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, le contengono come secondo indice; epperò se il loro esponente non è nullo, essi aggiungono a $\varphi$ dei termini in cui almeno una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ entrerà ad un grado maggiore di zero; tali termini dovranno dunque distruggersi con altri ad essi omogenei, giacchè $\varphi$ contiene le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ al grado zero. Non resteranno dunque che i soli termini dati da quelle $\Delta'' f$ nelle quali le $\Delta''$ non dipendono affatto dalle serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ c.d.d.

## §.X *Metodo delle variabili ausiliarie.*

53. Sia, come al §.8:

$$f(\overset{m}{x}\,;\overset{\mu}{y}\,;\dots;\overset{\nu}{z}) \equiv a_x^m\, b_y^\mu \dots e_z^\nu \qquad (1)$$

la rappresentazione simbolica della $\gamma$ forma algebrica generale con $r$ serie di variabili ($n^{ie}$): $x, y, \dots z$. L'espressione simbolica:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1} a_y^{\alpha_2} \dots a_z^{\alpha_r} a_\xi^{\alpha_{r+1}} \dots a_\eta^{\alpha_\rho} b_x^{\beta_1} b_y^{\beta_2} \dots b_z^{\beta_r} b_\xi^{\beta_{r+1}} \dots b_\eta^{\beta_\rho} \dots e_x^{\gamma_1} e_y^{\gamma_2} \dots e_\eta^{\gamma_\rho}, \qquad (2)$$

rappresenterà una forma algebrica ben determinata $F$, colle $\rho$ serie di variabili $x, y, \dots, z, \xi, \dots, \eta$ semprechè gli esponenti $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ soddisfino alle condizioni:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_\rho = m\,,\ \beta_1 + \dots + \beta_\rho = \mu, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_\rho = \nu\,.$$

Ci proponiamo di costruire un'operazione di polare $\Delta$, fra le $\rho$ serie $x, y, \dots, z, \xi, \dots, \eta$, tale da dare identicamente:

$$F = \Delta \cdot f$$

con che sarà dimostrato che $F$ è una polare di $f$.

Introducendo, infatti, altre $\nu$ serie di variabili ausiliarie $x', y', \dots, z'$, si può scrivere identicamente:

$$a_{x'}^m\, b_{y'}^\mu \dots e_{z'}^\nu = \frac{1}{\underline{|m}\,\underline{|\mu} \dots \underline{|\nu}} \mathcal{D}_{xx'}^m \mathcal{D}_{yy'}^n \dots \mathcal{D}_{zz'}^\nu \left\{ a_x^m\, b_y^n \dots e_z^\nu \right\} =$$

$$= \frac{1}{\underline{|m}\,\underline{|\mu} \dots \underline{|\nu}} \mathcal{D}_{xx'}^m \mathcal{D}_{yy'}^\mu \dots \mathcal{D}_{zz'}^\nu f\,.$$

D'altra parte, si può anche scrivere identicamente:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1} a_y^{\alpha_2} \dots a_\eta^{\alpha_\rho} b_x^{\beta_1} b_y^{\beta_2} \dots b_\eta^{\beta_\rho} \dots e_x^{\gamma_1} e_y^{\gamma_2} \dots e_\eta^{\gamma_\rho} =$$

$$= \frac{1}{\underline{|m}\,\underline{|\mu} \dots \underline{|\nu}} \cdot \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{x'y}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho} \mathcal{D}_{y'x}^{\beta_1} \dots \mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho} \dots \mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1} \dots \mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho} \left\{ a_{x'}^m\, b_{y'}^n \dots e_{z'}^\nu \right\},$$

onde si ha anche:

$$F \equiv \left(\frac{1}{\underline{|m}\ \underline{|\mu} \cdots \underline{|\nu}}\right)^2 \cdot \nabla \cdot f \qquad (4)$$

dove:

$$\nabla = \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1} \cdots \mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho} \mathcal{D}_{y'z}^{\beta_1} \cdots \mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho} \cdots \mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1} \cdots \mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho} \cdot \mathcal{D}_{xx'}^{m} \mathcal{D}_{yy'}^{n} \cdots \mathcal{D}_{zz'}^{\nu},$$

è un'operazione di polare fra le $\rho$ serie date $x, y, \ldots \eta$ e le $r$ serie ausiliarie $x', y', \ldots, z'$. Quest'ultime non sono però contenute nè in $f$ ne in $F$. Esse potranno no quindi *eliminarsi* secondo il teorema del §. preced.te (art. 52), sostituendo col procedimento ivi indicato, all'operazione $\nabla$, un'altra operazione $\Delta$ fra le sole serie date $x, y, \ldots, \eta$, la quale sarà equivalente a $\nabla$ semprechè la si applichi a funzioni delle sole $x, y, \ldots \eta$. L'espressione (4) ci fornirà così l'espressione desiderata del tipo (3).

Esempio I. Proponiamoci, p. es., di dedurre dalla forma fondamentale:

$$f \equiv a_x^2 b_y^2 c_z^2$$

la forma

$$F \equiv a_x a_y b_x b_y c_x c_y .$$

Applicando il procedimento generale, affatto simmetrico, da noi indicato, si dovrebbero introdurre tre nuove serie ausiliarie $x', y', z'$, scrivere dapprima $F$ sotto la forma:

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{x'x} \mathcal{D}_{x'y} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{z'x} \mathcal{D}_{z'y} \{a_{x'}^2 b_{y'}^2 c_{z'}^2\} =$$
$$= \frac{1}{64} \mathcal{D}_{x'x} \mathcal{D}_{x'y} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{z'x} \mathcal{D}_{z'y} \cdot \mathcal{D}_{xx'}^2 \mathcal{D}_{yy'}^2 \mathcal{D}_{zz'}^2 \cdot f$$

ed eliminare quindi le $x'$, $y'$, $z'$. Nel fatto basterà introdurre una sola serie ausiliaria $y'$, poichè si può scrivere evidentemente:

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yy'} f.$$

Per eliminare ora di qui la serie $y'$ si comincerà con applicare l'identità (art. 20, I'):

$$\mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{y'y}$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{yy'} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{yy'} \right\} f.$$

Si applicheranno quindi le formole:

$$\mathcal{D}_{y'x} \mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'x} + \mathcal{D}_{yx}$$
$$\mathcal{D}_{y'y} \mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{y'y'},$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yy'} \mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{y'y'} \right\} f$$
$$+ \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yy} \right\} f.$$

Ora, essendo $f$ indipendente dalla serie $y'$, si ha:

$$\mathcal{D}_{y'x} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y'} f = 0$$

onde resta semplicemente (osservando altresì che $\mathcal{D}_{yy} f = 2f$):

$$F = \frac{1}{8} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} f - \frac{1}{4} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} f =$$
$$= \frac{1}{4} \mathcal{D}_{zx} \mathcal{D}_{zy} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} - 1 \right\} f.$$

55. Esempio II. Essendo:

$$f \equiv a_x^3 b_y^2 c_z^2 \quad , \quad F \equiv a_x^2 a_z b_x b_y c_y c_z ,$$

si voglia costruire l'operazione di polare $\Delta$, fra le tre serie $x, y, z$ per la quale si ha $F = \Delta f$.

Anche qui basterà introdurre una sola serie ausiliaria $u$, poichè si può scrivere identicamente:

$$a_x^2 a_z b_x b_y c_y c_z = \frac{1}{12} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \left\{ a_x^3 b_y^2 c_z^2 \right\} .$$

Applicando le formole (I') dell'art. 20 si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{zz} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} .$$

Dipoi si ha, trasformando il primo termine del secondo membro:

$$\mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} + \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz}$$

e trasformando anche il secondo colle formole già citate e colla (I'', art. 20):

$$\mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{xu} =$$
$$= \left\{ \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{uu} \right\},$$

onde si conchiude:

$$\mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx}$$
$$+ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} - \mathcal{D}_{uu}$$

e quindi:

$$F = \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx} \right\} \cdot f$$
$$= \frac{1}{4} f + \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} \cdot f$$

56. Mercè la rappresentazione simbolica delle forme algebriche e la teoria testè svolta, siamo ora in grado

di rispondere alla questione: *data la forma algebrica più generale* $f(x^{m_1}; y^{m_2}; \ldots; z^{m_r})$ *con* $r$ *serie di variabili* $n^{rie}$ $(n \geqq r)$ *di dati ordini* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *rispetto ad ogni serie, qual'è il numero delle sue polari linearmente indipendenti*(*) *con* $\rho$ *serie*(**) *di variabili* $F(\xi^{\mu_1}; \eta^{\mu_2}; \ldots; \omega^{\mu_\rho})$ *di dati ordini* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$ *nelle singole serie?*

È chiaro infatti, dopo quanto si è dimostrato, che rappresentato $f$ simbolicamente con:

$$f \equiv a_x^{m_1} b_y^{m_2} \ldots e_z^{m_r}$$

il numero delle polari linearmente indipendenti, che si vuol conoscere, coincide col numero delle forme algebriche linearmente indipendenti del tipo:

$$a_\xi^{\alpha_{11}} a_\eta^{\alpha_{12}} \ldots a_\omega^{\alpha_{1\rho}} b_\xi^{\alpha_{21}} b_\eta^{\alpha_{22}} \ldots b_\omega^{\alpha_{2\rho}} \ldots e_\xi^{\alpha_{r1}} e_\eta^{\alpha_{r2}} \ldots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}, \qquad (5)$$

in cui gli esponenti $\alpha_{ij}$ soddisfano alle condizioni:

$$(6) \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1\rho} = m_1, & \alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{r1} = \mu_1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{2\rho} = m_2, & \alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{r2} = \mu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1} + \alpha_{r2} + \ldots + \alpha_{r\rho} = m_r, & \alpha_{1\rho} + \alpha_{2\rho} + \ldots + \alpha_{r\rho} = \mu_\rho. \end{cases}$$

Ma le forme algebriche del tipo (5) che corrispondono a

---

(*) Fra le quali cioè non abbia luogo alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

(**) Il numero $\rho$ è affatto indipendente da $r$, di cui può anche essere minore; le serie $\xi, \eta, \ldots, \omega$ possono evidentemente anche coincidere tutte, o in parte, colle serie primitive $x, y, \ldots, z$.

sistemi differenti di esponenti $\alpha_{ij}$, sono tutte linearmente indipendenti per $n \geqq r$; giacchè, se fra di esse sussistesse una relazione lineare a coefficienti costanti, questa stessa relazione dovrebbe sussistere in particolare anche nel caso in cui le serie $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$; $\ldots$; $e_1, \ldots, e_n$ avessero significato effettivo, cioè nel caso particolare in cui $f$ fosse il prodotto di forme lineari $a_x, a_x, \ldots, b_y, b_y, \ldots, e_z, e_z \ldots$. Ora ciò è assurdo, poichè gli $r\rho$ elementi lineari che si possono formare colle $r$ serie di coefficienti $a, b, \ldots, r$ e colle $\rho$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \omega$, sono fra loro affatto indipendenti, per $n \geqq r$, secondo quanto si è visto all' art. 42.

Concludiamo adunque che: *il numero delle forme polari linearmente indipendenti* $F(\overset{\mu_1}{\xi}; \overset{\mu_2}{\eta}; \ldots; \overset{\mu_\rho}{\omega})$ *deducibili dalla forma algebrica generale* $f(\overset{m_1}{x}; \overset{m_2}{y}; \ldots; \overset{m_r}{z})$ *è dato dal numero dei sistemi di valori interi e positivi delle* $\alpha_{ij}$ *che risolvono il sistema diofanteo (6)*

57. Il numero dei sistemi di soluzioni ammesse dal problema di partizione (6) si presenta anche in molte altre questioni enumerative attinenti alla teoria delle forme algebriche.(*) Noi lo rappresenteremo col simbolo

---

(*) Cfr. la memoria già citata: *Fondamenti* ecc. 1882. In questa memoria (art. 26 e segg.) il lettore potrà trovare anche ulteriori sviluppi sul metodo delle variabili ausiliarie.

$[m_1, m_2, \ldots, m_r ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho]$ che avrà significato soltanto quando le $m$ e $\mu$ soddisfino alla condizione

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\rho ,$$

giacchè soltanto in questo caso il sistema (6) può ammettere delle soluzioni, come facilmente si vede.

Dalla definizione di questa funzione aritmetica apparisce chiaramente che:

$$[m_1, m_2, \ldots, m_r ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho] = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho ; m_1, m_2, \ldots, m_r].$$

Di più, se $m'_1, m'_2, \ldots, m'_r$ sono gli stessi numeri $m_1$, $m_2, \ldots, m_r$ scritti in un ordine qualunque e similmente $\mu'_1, \ldots, \mu'_\rho$ è una permutazione qualunque dei numeri $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$, si ha pure manifestamente

$$[m'_1, \ldots, m'_r ; \mu'_1, \ldots, \mu'_\rho] = [m_1, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho].$$

Finalmente notiamo che se taluno degli elementi $m, \mu$ è uguale a zero, esso può trascurarsi. Così:

$$[0, m_2, m_3, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho] = [m_2, m_3, \ldots, m_r ; \mu_1, \ldots, \mu_\rho].$$

---

## §.XI. *Trasformazione di una forma qualunque mediante la trasformazione lineare dei suoi coefficienti simbolici.*

58. Eseguiamo nella forma algebrica generale di ordine $m$ coll'unica serie $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = a_x^m \qquad (1)$$

la solita sostituzione lineare:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n' \\
x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_n x_n' \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n'
\end{aligned}
\tag{2}
$$

che si può anche scrivere, colla notazione abbreviata, così:

$$x_1 = \alpha_{x'} \quad , \quad x_2 = \beta_{x'} , \dots , x_n = \varepsilon_{x'} . \tag{2'}$$

Tale sostituzione si potrà eseguire anche nella espressione simbolica di $f$, cioè si potrà scrivere che:

$$F'(x_1', x_2', \dots, x_n') = f(\alpha_{x'}, \beta_{x'}, \dots, \varepsilon_{x'}) = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m , \tag{3}$$

secondo il solito significato della espressione simbolica; poichè l'eguaglianza:

$$\sum \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2} \dots \underline{|\alpha_n}} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \alpha_{x'}^{\alpha_1} \beta_{x'}^{\alpha_2} \dots \varepsilon_{x'}^{\alpha_n} = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m$$

ha luogo certamente per valori effettivi qualsivogliano delle $a_1, a_2, \dots, a_n$, e deve quindi ridursi ad una identità quando si sviluppi la potenza $m^{\text{esima}}$ al secondo membro e si ordini il risultato secondo i termini distinti $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$.

Ciò premesso, se noi poniamo:

$$
\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \varepsilon_1 a_n \\
a_2' &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \varepsilon_2 a_n \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_n' &= \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

troviamo che:

$$a_1\alpha_{x'}+a_2\beta_{x'}+\cdots+a_n\varepsilon_{x'}=a_1'x_1'+a_2'x_2'+\cdots+a_n'x_n'=a_{x'}'$$

Possiamo dunque anche scrivere in luogo delle (3):

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F(x_1',x_2',\ldots,x_n')=\left[a_1'x_1'+a_2'x_2'+\cdots+a_n'x_n'\right]^m=a_{x'}'^m$$

$$(5)\qquad =\sum\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}}\,a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n}\cdot x_1'^{\alpha_1}x_2'^{\alpha_2}\cdots x_n'^{\alpha_n},$$

dove il significato di ogni prodotto simbolico $a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n}$ si deve trovare mediante le (4), cioè sviluppando il prodotto:

$$(\alpha_1a_1+\beta_1a_2+\cdots+\varepsilon_1a_n)^{\alpha_1}(\alpha_2a_1+\beta_2a_2+\cdots+\varepsilon_2a_n)^{\alpha_2}\cdots(\alpha_na_1+\beta_na_2+\cdots+\varepsilon_na_n)^{\alpha_n}$$

e sostituendo ad ogni prodotto simbolico $a_1^{h_1}a_2^{h_2}\cdots a_n^{h_n}$ (in cui $h_1+h_2+\cdots+h_n=m$) il corrispondente valore effettivo $\bar{A}_{h_1,h_2,\ldots h_n}$.

Dunque: se

$$F(x_1',x_2',\ldots,x_n')=\sum\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}}\bar{A}'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1'^{\alpha_1}x_2'^{\alpha_2}\cdots x_n'^{\alpha_n}$$

è la trasformata mediante la sostituzione (2) della primitiva forma:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}}\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

l'espressione del coefficiente trasformato $\bar{A}'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ in funzione dei primitivi coefficienti $A$ sarà data da:

$$\bar{A}'=a_1'^{\alpha_1}a_2'^{\alpha_2}\cdots a_n'^{\alpha_n},$$

quando alle $a_1',a_2',\ldots,a_n'$ si siano sostituite le loro espressioni (4).

59. Se consideriamo che la sostituzione (4) cambia le $a$ nelle $a'$ con una trasformazione controgrediente (art. 37) alle (2) che cambia le $x$ nelle $x'$, vediamo che quanto si è

ora dimostrato si può anche riassumere nel seguente enunciato:

*Se $f \equiv a_x^m$ è una certa forma ed $F \equiv a'^m_{x'}$ la forma che se ne deduce eseguendo sulle $x$ una certa sostituzione lineare, il significato dei simboli $a'$ si può desumere da quello dei simboli $a$ trasformando le $a$ nelle $a'$ mediante la sostituzione lineare controgrediente a quella che si è eseguita sulle $x$.*

Approfitteremo di questo importante principio per dare una nuova dimostrazione del carattere invariantivo delle forme polari.

Sia $f \equiv a_x^m$ una forma qualunque e sia p. es.:

$$a_x^\lambda \, a_y^\mu \, a_z^\nu \qquad , \qquad \lambda + \mu + \nu = m$$

una sua polare mista (§.VIII). Se $F \equiv a'^m_{x'}$ è la trasformata di $f$ secondo la sostituzione lineare (2), la stessa polare mista costruita per la forma trasformata $F$ sarà espressa evidentemente da:

$$a'^\lambda_{x'} \, a'^\mu_{y'} \, a'^\nu_{z'} .$$

Dico che sarà:

$$a_x^\lambda \, a_y^\mu \, a_z^\nu = a'^\lambda_{x'} \, a'^\mu_{y'} \, a'^\nu_{z'} \tag{6}$$

Infatti dalle formole (2) combinate colle (4) (di cui ci è lecito far uso, per il principio dell'art. prec., allo scopo di avere il significato del secondo membro di (6) segue (art. 37).

$$a'_{x'} = a_x$$

Similmente dalle formole cogredienti alle (2) che trasformano le $y$ nelle $y'$ combinate sempre colle (4) segue:

$$a'_{y'} = a_y$$

e similmente si avrebbe $a'_{z'} = a_z$. Dunque mediante le formole di trasformazione delle $x$ nelle $x'$, delle $y$ nelle $y'$, delle $z$ nelle $z'$ e mediante le (4), che fanno appunto dipendere il significato dei simboli $a'$ da quello dei simboli $a$, il secondo membro della (6) si può rendere perfettamente identico al primo, c.d.d.

61 - Nelle cose dette in questo §. ci siamo limitati per maggiore semplicità al caso di una forma fondamentale con un' unica serie di variabili. E' però facile di accorgersi come esse possano estendersi, senza modificazioni essenziali, al caso generale di una forma $f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\ldots;\overset{\nu}{z})$ con $\rho$ serie $x, y, \ldots, z$. Siano cioè rispettivamente:

$$f(x;y;\ldots;z) \equiv a_x^m b_y^\mu \ldots e_z^\nu \,,\; F(x';y';\ldots;z') \equiv a'^m_{x'} b'^\mu_{y'} \ldots e'^\nu_{z'}$$

le rappresentazioni simboliche (art. 48) della forma $f(x;y;\ldots;z)$ e della forma:

$$F(x';y';\ldots;z') = f(x;y;\ldots;z) \qquad (7)$$

in cui si trasforma la $f$ quando le serie $x, y, \ldots, z$ si trasformino cogredientemente nelle serie $x', y' \ldots z'$ rispettivamente, mediante la stessa sostituzione (2) che cambia

le $x$ nelle $x'$.

Sia poi

$$\bar{A}_{m_1 m_2 \cdots m_n ; \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n ; \cdots ; \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n} \equiv a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n} b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} \cdots b_n^{\mu_n} \cdots e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2} \cdots e_n^{\nu_n} \quad (8)$$

il coefficiente preparato di quel termine di $f$ che contiene:

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \cdots y_n^{\mu_n} \cdots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n},$$

ed

$$\bar{A}'_{m_1 m_2 \cdots m_n ; \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n ; \cdots ; \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n} \equiv a_1'^{m_1} a_2'^{m_2} \cdots a_n'^{m_n} \cdots e_1'^{\nu_1} e_2'^{\nu_2} \cdots e_n'^{\nu_n} \quad (9)$$

il corrispondente coefficiente preparato di $F(x'; y'; \ldots; z')$, cioè il coefficiente di quel termine di $F$ che contiene:

$$x_1'^{m_1} x_2'^{m_2} \cdots x_n'^{m_n} y_1'^{\mu_1} y_2'^{\mu_2} \cdots y_n'^{\mu_n} \cdots z_1'^{\nu_1} z_2'^{\nu_2} \cdots z_n'^{\nu_n}.$$

*Per esprimere un qualunque coefficiente $\bar{A}'$ in funzione dei coefficienti $\bar{A}$ basterà sostituire nell'espressione simbolica (9) di $\bar{A}'_{m_1 m_2 \cdots m_n ; \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \cdots ; \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}$ ai simboli $a', b', \ldots, e'$ i simboli $a, b, \ldots$ e mediante le sostituzioni controgredienti alla sostituzione (2), cioè mediante le sostituzioni:*

$$(10) \quad \begin{array}{ll} a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \cdots + \varepsilon_1 a_n & b_1' = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2 + \cdots + \varepsilon_1 b_n \\ a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_2 a_n \quad , & b_2' = \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_2 b_n, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n' = \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n & b_n' = \alpha_n b_1 + \beta_n b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n \end{array}$$

*Si otterrà così un'espressione simbolica delle $\bar{A}'$ formata coi simboli $a, b, \ldots, e$, i quali potranno facilmente eliminarsi mediante le (8) introducendo invece loro i valori effettivi $\bar{A}$.*

62- Mediante le sostituzioni delle $x$ colle $x'$, delle $y$ colle $y'$, ecc. secondo le (2) e mediante le sostituzioni delle $a$ nelle $a'$, delle $b$ nelle $b'$, ecc. secondo le (10), gli elementi lineari simbolici:

$$\begin{array}{lcl} a_x,\ b_x,\ \ldots,\ e_x & & a'_{x'},\ b'_{x'},\ \ldots,\ e'_{x'} \\ a_y,\ b_y,\ \ldots,\ e_y & \text{si cambiano risp. in} & a'_{y'},\ b'_{y'},\ \ldots,\ e'_{y'} \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ a_z,\ b_z,\ \ldots,\ e_z & & a'_{z'},\ b'_{z'},\ \ldots,\ e'_{z'} \end{array}$$

L'eguaglianza simbolica:

$$a_x^m\, b_y^\mu \ldots e_z^\nu = a'^{\,m}_{x'}\, b'^{\,\mu}_{y'} \ldots e'^{\,\nu}_{z'}$$

che rappresenta l'eguaglianza effettiva (7), non è dunque che un caso particolare delle uguaglianze simboliche:

$$a_x^{\alpha_{11}}\, a_y^{\alpha_{12}} \ldots a_z^{\alpha_{1p}}\, b_x^{\alpha_{21}}\, b_y^{\alpha_{22}} \ldots b_z^{\alpha_{2p}} \ldots e_x^{\alpha_{p1}}\, e_y^{\alpha_{p2}} \ldots e_z^{\alpha_{pp}}$$

$$= a'^{\,\alpha_{11}}_{x'}\, a'^{\,\alpha_{12}}_{y'} \ldots a'^{\,\alpha_{1p}}_{z'}\, b'^{\,\alpha_{21}}_{x'}\, b'^{\,\alpha_{22}}_{y'} \ldots b'^{\,\alpha_{2p}}_{z'} \ldots e'^{\,\alpha_{p1}}_{x'}\, e'^{\,\alpha_{p2}}_{y'} \ldots e'^{\,\alpha_{pp}}_{z'}$$

le quali, quando siano suscettibili di significato effettivo, cioè quando siano soddisfatte le condizioni:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{1p} = m$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{2p} = \mu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{p1} + \alpha_{p2} + \cdots + \alpha_{pp} = \nu$$

rappresentano (art. 56) l'uguaglianza fra una polare qualsivoglia $\Delta(x, y, \ldots, z)f$ delle $f$ e la polare corrispondente delle $F$.

## §.XII. *Definizione di invarianti e covarianti. - Esempî -*

63. Sia dato un sistema di forme algebriche fondamentali $n^{\underline{rie}}$:

$$f(x;y;\cdots)\,,\ \varphi(x;y;\cdots)\,,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

con una o più serie di variabili $x, y, \ldots$, a coefficienti affatto arbitrarii, e siano rispettivamente:

$$f_1(x';y';\cdots)\,,\ \varphi_1(x';y';\cdots)\,,\ \cdots\cdots \qquad (2)$$

i valori delle (1) espressi in funzione delle variabili $x'$, $y'$, ... trasformate cogredienti delle $x, y, \ldots$, che, cioè, si deducano risp. dalle $x, y, \ldots$ mediante la stessa sostituzione lineare:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' & y_1 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n' \\ \cdots\cdots\cdots\

$x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$ :

$$R(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) . R(A; B; \ldots; x; y; \ldots).$$

64- Se il covariante $R$ non contiene le $x, y, \ldots$, cioè dipende soltanto dai coefficienti delle (1), si dice anche che esso è un *invariante*; che se invece dipende dalle sole $x, y, \ldots$, si dice anche che esso è un *covariante identico*.

Finalmente si dice che $R$ è un covariante (o invariante) *assoluto*, quando il fattore $\chi$ è una semplice costante eguale all'unità.

65- Le forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$ sono evidentemente dei covarianti assoluti; e tali sono pure (cfr. §V) tutte le loro polari semplici o miste:

$$\mathcal{D}_{xy} f, \quad \mathcal{D}_{xy}^2 f, \quad \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} f, \quad \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yz} \mathcal{D}_{zx} \varphi, \ldots$$

e per conseguenza anche i loro prodotti, le somme dei loro prodotti, ecc.

66- L'esempio più semplice di covariante $n^{\text{ario}}$ identico si ha nella parentesi $(x\, y \ldots z)$ composta con $n$ serie cogredienti $x, y, \ldots, z$. Si è infatti già trovato (art. 10):

$$(x'\, y' \ldots z') = (\alpha\, \beta \ldots \varepsilon)^{-1} \cdot (x\, y \ldots z).$$

Quanto agli invarianti, l'esempio più semplice si ha nel caso di un sistema fondamentale composto di $n$ forme lineari $a_x, b_x, \ldots e_x$. Infatti, se $a'_{x'}, b'_{y'}, \ldots e'_{z'}$ sono le forme lineari trasformate, si ha (art. 40)

$$(a'\, b' \ldots e') = (\alpha\, \beta \ldots \varepsilon) \cdot (a\, b \ldots e)$$

67. Un esempio molto importante di covariante di una forma fondamentale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, coll'unica serie di variabili $x$, si ha nel così detto *Hessiano* di $f$, cioè nella funzione $H$ così definita:

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Invero, se poniamo per un momento:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_n$$

possiamo scrivere:

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

onde se $\xi, \eta, \dots, \omega$ sono $n$ nuove serie di variabili affatto indipendenti fra loro e dalla serie $x$, si ha, per la regola del prodotto dei determinanti:

$$(\xi\, \eta \dots \omega) \cdot H = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{x\xi} f_1 & \mathcal{D}_{x\xi} f_2 & \dots & \mathcal{D}_{x\xi} f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x\omega} f_1 & \mathcal{D}_{x\omega} f_2 & \dots & \mathcal{D}_{x\omega} f_n \end{vmatrix}$$

e moltiplicando ancora per $(\xi\, \eta \dots \omega)$:

$$(\xi\,\eta\ldots\omega)^2\cdot H=\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{x\xi}f & \mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{x\eta}f & \ldots & \mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{x\omega}f \\ \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{x\xi}f & \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{x\eta}f & \ldots & \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{x\omega}f \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{x\omega}\mathcal{D}_{x\xi}f & \mathcal{D}_{x\omega}\mathcal{D}_{x\eta}f & \ldots & \mathcal{D}_{x\omega}\mathcal{D}_{x\omega}f \end{vmatrix}$$

Il prodotto $(\xi\,\eta\ldots\omega)^2 H$ è dunque un covariante assoluto, poichè ogni elemento dell'ultimo determinante (polare mista di $f$) è un covariante assoluto, come si è notato sopra (art. 65). Pertanto se $H'$ è la stessa forma $H$ colla serie trasformata $x'$ e coi coefficienti delle forme trasformate di $f$, si avrà:

$$(\xi\,\eta\ldots\omega)^2\cdot H=(\xi'\,\eta'\ldots\omega')^2\cdot H',$$

essendo $\xi', \eta', \ldots \omega'$ le trasformate delle serie $\xi, \eta, \ldots \omega$ cogredienti alle serie $x$. Ora da quest'uguaglianza e dall'uguaglianza:

$$(\xi'\,\eta'\ldots\omega')=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)^{-1}\cdot(\xi\,\eta\ldots\omega)$$

segue subito:

$$H'=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)^2 H$$

c. d. d.

68. Se la forma fondamentale $f$ è una forma quadratica

$$f\equiv\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}\,x_i\,x_j \qquad , \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

il suo Hessiano non contiene le $x$, cioè si riduce ad un

invariante. Quest'invariante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si chiama anche, come è noto, il *discriminante* della forma quadratica $f$.

---

## §.XIII. *Esprimibilità dei covarianti razionali come quozienti di covarianti interi.*

Indicando, come al §. prec., con $A_i, B_i, \dots$ i coefficienti delle forme algebriche primitive $f, \varphi, \dots$ e con $A'_i, B'_i, \dots$ i corrispondenti coefficienti delle forme trasformate $f_1, \varphi_1, \dots$ componenti il sistema fondamentale:

$$f(x;y;\dots)=f_1(x';y';\dots) \quad , \quad \varphi(x;y;\dots)=\varphi_1(x';y';\dots), \dots, \qquad (1)$$

sia $R(A;B;\dots;x;y;\dots)$ un covariante razionale di questo sistema.

Si sa dalla teoria della divisibilità delle funzioni intere di più variabili che ogni funzione razionale di più variabili si può sempre esprimere, ed in un unico modo, come il quoziente di due funzioni intere, prime fra loro, delle stesse variabili. Possiamo dunque scrivere:

$$R(A;B;\dots;x;y;\dots)=\frac{F(A;B;\dots;x;y;\dots)}{\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)} \qquad (2)$$

dove $F$ e $\Phi$ sono funzioni razionali intere prime fra loro di tutte le variabili $A, B, \ldots, y, \ldots$

Per il supposto si ha:

$$\frac{F(A';B';\ldots;x';y';\ldots)}{\Phi(A';B';\ldots;x';y';\ldots)} = \chi(\alpha,\beta,\ldots,\varepsilon)\,\frac{F(A;B;\ldots;x;y;\ldots)}{\Phi(A;B;\ldots;x;y;\ldots)} \qquad (3)$$

dove $\chi$ è una funzione razionale delle sole variabili $\beta_i, \ldots, \varepsilon_i$ (coefficienti della sostituzione lineare).

Ora dalle (1) emerge chiaramente che le $A'_i$ sono funzioni intere delle $A_i$ con coefficienti che sono funzioni intere delle $\alpha_i$, $\beta_i; \ldots, \varepsilon_i$; e lo stesso dicasi delle $B'_i$ rispetto alle $B_i$, ecc. Pertanto se in luogo delle $A', B', \ldots, x', y' \ldots$ si pongano rispettivamente le loro espressioni nelle $A, B, \ldots, x, y, \ldots$, si potrà scrivere:

$$F(A';B';\ldots;x';y';\ldots) = \frac{F_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots,\varepsilon)}{D^h}$$

$$\Phi(A';B';\ldots;x';y';\ldots) = \frac{\Phi_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots\varepsilon)}{D^k} \qquad (4)$$

dove $F_1$, $\Phi_1$ sono funzioni intere e $D = (\alpha\beta\ldots\varepsilon)$; di più $F_1$ e $\Phi_1$ sono nelle $A, B, \ldots, x, y, \ldots$ risp. degli stessi gradi delle $F$ e $\Phi$.

Sostituendo le espressioni (4) in (3) si avrà dunque:

$$\frac{F_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots)}{\Phi_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots)} = \frac{\chi_1(\alpha,\beta,\ldots)\cdot F(A;B;\ldots;x;y;\ldots)}{\chi_2(\alpha,\beta,\ldots)\cdot \Phi(A;B;\ldots;x;y;\ldots)},$$

dove $\chi_1$, $\chi_2$ sono certe due funzioni intere, prime fra loro, delle sole variabili $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \varepsilon_i$.

Poichè ora la frazione nel secondo membro è già ridotta alla sua più semplice espressione, e poichè i numeratori e i denominatori nei due membri sono risp. degli stessi gradi nelle $A_i, B_i, \ldots, x_i, y_i, \ldots$, dovrà esistere una funzione intera $\chi_0(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$ delle sole $\alpha_i, \beta_i, \ldots \varepsilon_i$, tale da aversi identicamente:

$$F_1(A; B; \ldots; x; y; \ldots; \alpha, \beta, \ldots) = \chi_0 \cdot \chi_1 \cdot F(A; B; \ldots; x; y; \ldots)$$

$$\Phi_1(A; B; \ldots; x; y; \ldots; \alpha, \beta, \ldots) = \chi_0 \cdot \chi_2 \cdot \Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots),$$

dignisachè, confrontando colle (4), si conclude:

$$F(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \chi_0 \chi_1 D^{-h} \cdot F(A; B; \ldots; x; y; \ldots)$$

$$\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \chi_0 \chi_2 D^{-k} \cdot \Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots),$$

cioè che ciascuna delle due funzioni intere $F$ e $\Phi$ è per se stessa un covariante.

Resta con ciò dimostrato che *se un covariante razionale non è intero, esso è il quoto di due covarianti interi*.

---

## §. XIV. *Proprietà fondamentale dei covarianti.*

70. Dopo quanto si è stabilito nel §. prec. possiamo d'ora innanzi limitarci, di regola, allo studio dei soli covarianti interi.

Mantenendo le stesse notazioni del §. prec., sia $\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots)$ un covariante intero qualunque del

sistema di forme fondamentali $f, \varphi, \cdots$; cosicchè si abbia:

$$\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \cdot \Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots). \quad (1)$$

Ci proponiamo di dimostrare che *la funzione razionale* $\chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$ *è una potenza intera, positiva o negativa del modulo* $D = (\alpha\beta\ldots\varepsilon)$ *della sostituzione lineare che lega le* $x, y, \ldots$ *risp. alle* $x', y', \ldots$.

71 - Cominciamo dal notare che, esprimendo le $A', B', \ldots, x', y', \ldots$ in funzione delle $A, B, \ldots, x, y, \ldots$, si può porre come nel §. prec.

$$\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \frac{\Phi_1(A; B; \ldots; x; y; \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{D^k}$$

ed esprimendo invece le $A, B, \ldots, x, y, \ldots$ in funzione delle $A', B', \ldots, x', y', \ldots$:

$$\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots) = \frac{\Phi_2(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{D^h}$$

dove $\Phi_1, \Phi_2$ esprimono funzioni intere ed $h, k$ numeri interi e positivi.

Queste due formole combinate colla (1) ci danno risp.:

$$D^k \cdot \chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = \frac{\Phi_1(A; B; \ldots x; y; \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots)}$$

e

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)} = \frac{\Phi_2(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots)}$$

Poichè ora la prima di queste due uguaglianze è una identità rispetto alle variabili $A_i, B_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots \alpha, \beta, \ldots$ che possono prendere valori arbitrarii fra loro del tutto in-

dipendenti, e così la seconda è una identità fra le $A'$, $B'$, ..., $x'$, $y'$, ..., $\alpha$, $\beta$, ... che sono del pari fra loro indipendenti, potremo nella prima eguaglianza sostituire per $A_i$, $B_i$, ..., $x$, $y$, ... dei numeri scelti a piacere, che però non annullino la funzione $\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots)$ e similmente nella seconda potremo sostituire per le $A'_i$, $B'_i$, ..., $x'$, $y'$, ... dei numeri qualsivogliano che non annullino $\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots)$. Dopo ciò in queste uguaglianze resteranno indeterminate, e ancora completamente arbitrarie, le sole $\alpha_i$, $\beta_i$, ... $\varepsilon_i$, le quali però figurano, nei secondi membri, soltanto nei numeratori, cioè in modo intero. Le due sopradette uguaglianze assumeranno dunque la forma speciale seguente:

$$D^k \cdot \chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = \psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \qquad (3)$$

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)} = \psi_2(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \qquad (4)$$

essendo $\psi_1$, $\psi_2$ funzioni intere delle sole $\alpha$, $\beta$, ..., $\varepsilon$.

Ora queste due uguaglianze moltiplicate membro a membro ci danno l'identità:

$$\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \cdot \psi_2(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = D^{h+k},$$

dalla quale, poichè le funzioni intere $\psi_1$ e $\psi_2$ non possono decomporsi in un prodotto di funzioni prime che in un unico modo, appare chiaramente che ognuna di esse deve essere una potenza intera e positiva di $D$.

Sostituendo nella (3) per $\psi$ tale potenza di $D$, si avrà dunque:

$$\chi(\alpha, \beta, \cdots, \varepsilon) = D^{\tau}$$

essendo $\tau$ un intero positivo o negativo, c. d. d.

72. Il numero $\tau$ per il quale è soddisfatta l'uguaglianza:

$$\Phi(A'; B'; \cdots; x'; y'; \cdots) = (\alpha\beta\cdots\varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi(A; B; \cdots; x; y; \cdots)$$

si chiama (per ragioni che appariranno nel seguente §) il peso del covariante $\Phi$.

Vediamo così, in particolare (art. 65) che le parentesi di variabili $(x\, y \cdots z)$ sono covarianti di peso negativo $(=-1)$, nel mentre che le parentesi di coefficienti di forme lineari $(a\, b \cdots e)$ sono invarianti di peso positivo $(=+1)$. Invece le forme polari delle forme fondamentali sono tutti (art. 64) covarianti di peso nullo.

---

## §. XV. *Relazione fra ordini, gradi e peso di un covariante.*

73. Mantenendo ancora le stesse notazioni dei §. precedenti, sia $\Phi$ un covariante di peso $\tau$ delle forme fondamentali:

$$(1) \qquad f(x; y; \cdots), \quad \varphi(x; y; \cdots), \quad \cdots,$$

cosicchè

$$(2) \qquad \Phi(A'; B'; \cdots; x'; y'; \cdots) = (\alpha\beta\cdots\varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi(A; B; \cdots; x; y \cdots).$$

Se il covariante $\Phi$ non fosse omogeneo nei coefficienti della forma $f$, o negli elementi della serie $x$, esso so-

vrebbe evidentemente essere la somma di parti omogenee, ciascuna delle quali, al pari di tutta la funzione $\Phi$, dovrebbe per se stessa soddisfare alla (2), ossia godere essa stessa della proprietà invariantiva. Pertanto ci limiteremo d'ora innanzi a considerare covarianti omogenei nei coefficienti di ogni singola forma fondamentale e del pari omogenei negli elementi di ogni singola serie di variabili.

Ciò posto, se indichiamo con $g_1$ il grado di $\Phi$ nei coefficienti $A$ della forma $f$, con $g_2$ il suo grado nei coefficienti $B$ di $\varphi$, ecc., i numeri $g_1, g_2, \ldots$ si diranno i *gradi* del covariante $\Phi$ (risp. corrispondenti alle forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$). Se indichiamo poi risp. con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ il grado di $\Phi$ nella serie $x$, nella serie $y$, ecc., i numeri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ si chiameranno gli *ordini* di $\Phi$ (per le rispettive serie $x, y, \ldots$).

74. Sia $m_1$ il grado complessivo della forma fondamentale $f$ in tutte le $x, y, \ldots$; sia $m_2$ il grado analogo per la $\varphi$, ecc.

Se sostituiamo in $\Phi$ in luogo delle $A', B', \ldots$ le loro espressioni nelle $A, B, \ldots$, si otterrà:

$$(3) \qquad \Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \Phi_1(A; B; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

dove $\Phi_1$ è una funzione razionale intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sarà omogenea e di grado $m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots$

poichè $\Phi$ è del grado $g_1$ nelle $A'$ ed ogni $A'$ si esprime con una funzione intera delle $A$ e delle $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ che rispetto a queste ultime è omogenea e del grado stesso $m_1$ della forma fondamentale $f$, e similmente per le $B'$, ecc. Se invece sostituiamo in $\Phi(A; B; \dots; x; y; \dots)$ in luogo delle $x, y, \dots$ le loro espressioni nelle $x', y', \dots$ che sono lineari ed omogenee nelle $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, si avrà:

$$(4) \qquad \Phi(A; B; \dots; x; y; \dots) = \Phi(A; B; \dots; x'; y'; \dots; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon)$$

dove $\Phi_2$ è funzione intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ sarà omogenea e di grado $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$. Dalle (2), (3), (4) segue ora:

$$\Phi_1(A; B; \dots; x'; y'; \dots; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = (\alpha\beta\dots\varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi_2(A; B; \dots; x'; y'; \dots; \alpha, \beta, \dots \varepsilon)$$

e deve essere questa un'identità rispetto alle variabili completamente indipendenti $A, B, \dots; x', y', \dots; \alpha, \beta, \dots \varepsilon$. Eguagliando i gradi dei due membri nelle $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, si trova così che dev'essere:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \dots = n\tau + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

Pertanto: il peso di un covariante $n^{\text{ario}}$ si esprime, in funzione dei suoi gradi ed ordini e degli ordini complessivi $m_1, m_2, \dots$ delle forme fondamentali, mediante la formola:

$$\tau = \frac{\sum m_i g_i - \sum \gamma_i}{n}.$$

75- Se nella forma fondamentale (che per semplicità supporremo contenere la sola serie $x$):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

consideriamo un coefficiente qualunque $A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$, gl'i indici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, ai quali esso corrisponde, li chiameremo i pesi di tale coefficiente, e precisamente chiameremo *primo peso* l'indice $\alpha_1$, *secondo peso* l'indice $\alpha_2$, e così via.

Ciò posto, si eseguisca nella $f$ la sostituzione lineare semplicissima:

$$x_1 = x_1', \cdots, x_{h-1} = x_{h-1}', \; x_h = \varepsilon x_h', \; x_{h+1} = x_{h+1}', \cdots, x_n = x_n'.$$

Si avrà

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum \varepsilon^{\alpha_h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} (x_1')^{\alpha_1} (x_2')^{\alpha_2} \cdots (x_n')^{\alpha_n},$$

onde

$$A'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$$

e similmente per le altre forme fondamentali $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots$

Pertanto, esprimendo nelle (2) le $A', B', \cdots$ colle $A, B, \cdots$ e le $x', y', \cdots$ colle $x, y, \cdots$ ed osservando che ora $(\alpha\, \beta \cdots) = \varepsilon$, si trova l'identità:

$$\Phi\left(\begin{matrix} x_1, y_1, \cdots \\ \cdots\cdots \\ \varepsilon^p A; \varepsilon^q B; \cdots; \frac{x_h}{\varepsilon}, \frac{y_h}{\varepsilon}, \cdots \\ \cdots\cdots \\ x_n, y_n, \cdots \end{matrix}\right) = \varepsilon^{\tau} \Phi\left(\begin{matrix} x_1, y_1, \cdots \\ \cdots\cdots \\ A; B; \cdots; x_h, y_h, \cdots \\ \cdots\cdots \\ x_n, y_n, \cdots \end{matrix}\right)$$

dove $p$ indica l'$h^{mo}$ peso del coefficiente $A$, similmente $q$ l'$h^{mo}$ peso di $B$, ecc. Identificando ogni termine del primo membro col corrispondente del secondo, si vede di qui che, se $P_h$ è la somma degli $h^{mi}$ pesi di tutti i coefficienti $A, B, \cdots$ che entrano come fattori (semplici o ripetuti) in un qualsiasi

termine del covariante $\Phi$ e $\Pi_h$ è il grado di questo stesso termine rispetto alle variabili $x_h, y_h, \ldots$, la differenza $P_h - \Pi_h$ è uguale a $\tau$, peso del covariante $\Phi$.

La differenza $P_h - \Pi_h$ (che si definisce come peso $h^{mo}$ del termine considerato*) ha dunque lo stesso valore in ogni termine del covariante $\Phi$. Essa è inoltre indipendente da $h$, e si ha:

$$P_1 - \Pi_1 = P_2 - \Pi_2 = \ldots = P_n - \Pi_n = \tau$$

essendo $\tau$ il peso del covariante $\Phi$.

Questo teorema si enuncia spesso dicendo che la funzione $\Phi$ è isobarica (cioè di egual peso in tutti i suoi termini) rispetto a ciascuno degli $n$ indici $1, 2, \ldots, n$.

76. Se le forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$ contengono un numero qualunque $\nu$ di serie di variabili $x, y, \ldots z$, e sia una qualunque di esse:

$$f \equiv \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}\ldots y_n^{\beta_n}\ldots z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2}\ldots z_n^{\gamma_n},$$

si chiamerà peso $h^{mo}$ del coefficiente $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}$ la somma $\alpha_h + \beta_h + \ldots + \gamma_h$.

Si chiamerà poi peso $h^{mo}$ di un prodotto qualunque di coef-

---

* Così, ad esempio, il termine $A_{123} A_{213}^3 B_{310} x_1 x_2 x_3 y_1 y_2^2$ avrà:

per primo peso: $1 + (3 \times 2) + 3 - 1 - 1 = 8$

per secondo peso. $2 + (3 \times 1) + 1 - 1 - (2 \times 1) = 3$

per terzo peso: $3 + (3 \times 3) + 0 - 1 - 0 = 11$

onde esso non potrebbe essere termine di alcun covariante ternario.

ficienti $A, B, \ldots$ e di variabili $x, y, \ldots$ la somma dei pesi di tutti i coefficienti $A, B, \ldots$ che entrano come fattori del prodotto, diminuita del grado complessivo del prodotto stesso nelle variabili $x_h, y_h, \ldots, z_h$, cioè in quelle variabili che hanno per indice $h$.

Da questa definizione emerge per esempio che il peso di un prodotto di soli coefficienti $A, B, \ldots$ è sempre positivo, che invece è sempre negativo il peso di un prodotto di sole variabili $x, y, \ldots$, che il peso di un termine qualunque delle forme fondamentali è sempre uguale a zero, ecc.

Ciò premesso, è chiaro che la dimostrazione dell'art. 75 si estende immediatamente anche al caso in cui le forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$ contengano un numero qualunque di serie di variabili, conducendo precisamente allo stesso enunciato, cioè che: *i termini di un covariante qualunque $\Phi$ hanno tutti lo stesso peso $h^{mo}$ (sono isobarici rispetto all'indice $h$). Questo peso comune $h^{mo}$ è indipendente da $h$ ed è uguale al peso $\tau$ del covariante.*

---

## §. XVI. Numero degli invarianti e covarianti algebricamente indipendenti di un sistema di forme fondamentali.

77. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i coefficienti, affatto generali, scritti in un ordine da fissarsi ad arbitrio, della data forma

fondamentale o del sistema dato di forme fondamentali.

Siano poi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_N$ i coefficienti corrispondenti delle forme trasformate per mezzo della sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \cdots + \alpha_n x'_n \\ x_2 &= \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \cdots + \beta_n x'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varepsilon_1 x'_1 + \varepsilon_2 x'_2 + \cdots + \varepsilon_n x'_n \end{aligned} \tag{1}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A'_1 &= f_1 (A_1, A_2, \ldots, A_N ; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \\ A'_2 &= f_2 (A_1, A_2, \ldots, A_N ; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_N &= f_N (A_1, A_2, \ldots, A_N ; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

essendo le $f$ simboli di funzioni razionali intere. Noi ammetteremo come postulato che fra le $N$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_N$ considerate come funzioni delle sole $n^2$ variabili $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ve ne siano $n^2$ fra loro indipendenti (*); per il che si richiede, evidentemente, che sia soddisfatta la condizione:

$$N \geqq n^2. \tag{3}$$

Ciò premesso, e supposto, per fissare le idee, che siano fra loro indipendenti le prime $n^2$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_{n^2}$, riguardate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, si potranno sempre al-

---

(*) In altri termini: che non sia, p. es.:

$$f_i = F_i (f_1, f_2, \ldots, f_{n^2}, A_1, A_2, \ldots, A_N) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

identicamente nelle variabili $A_1, \ldots, A_N, \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$.

le $n^2$ quantità $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ dare dei valori tali da soddisfare alle equazioni:

$$\begin{aligned} f_1(A_1, A_2, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) &= c_1 \\ f_2(A_1, A_2; \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) &= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_{n^2}(A_1, A_2, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) &= c_{n^2} \end{aligned} \tag{4}$$

essendo le $c$ delle costanti da fissarsi ad arbitrio al pari delle $A$. Immaginando risolute le (4) rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ e sostituiti i risultati nelle (2), si otterranno per le $A'$ delle espressioni speciali, che indicheremo con $(A)$, della forma:

$$\left.\begin{aligned} &(A_1) = c_1, \ (A_2) = c_2, \ldots, (A_{n^2}) = c_{n^2} \\ &(A_{n^2+1}) = \varphi_1(A_1, \ldots, A_N), \ldots, (A_N) = \varphi_{N-n^2}(A_1, \ldots, A_N) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove le $\varphi$ sono simboli di funzioni *algebriche*.

Siano ora $A'_1, A'_2, \ldots, A'_N$ dei coefficienti trasformati ottenuti dai primitivi $A_1, A_2, \ldots, A_N$ mediante una qualsiasi sostituzione (1) che indicheremo con $S$. Componendo questa sostituzione $S$ colla sostituzione $S'$, testè considerata, mediante la quale le $A'_1, A'_2, \ldots, A'_N$ si trasformano rispettivamente in $(A'_1), (A'_2), \ldots, (A'_N)$, si avrà che, mediante la sostituzione $SS'$, i coefficienti $A_1, A_2, \ldots, A_N$ si saranno cangiati rispettivamente in:

$$c_1, c_2, \ldots, c_{n^2}, \varphi(A'_1, \ldots, A'_N), \ldots, \varphi_{N-n^2}(A'_1, \ldots, A'_N).$$

La sostituzione $SS'$ ha dunque i suoi coefficienti $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ soddisfacenti alle (4), onde sarà:

$$\varphi_i(A'_1, \ldots, A'_N) = \varphi_i(A_1, \ldots, A_N) \quad , i = 1, 2, \ldots, N-n^2 \tag{6}$$

78. La funzione $\varphi_i$ non essendo in generale razionale, ma soltanto algebrica, il simbolo $\varphi_i(A_1, \ldots, A_N)$ è suscettibile di un certo numero finito di significati; cosicchè l'eguaglianza (6) deve intendersi nel senso che uno dei significati di $\varphi_i(A_1, \ldots, A_N)$ coincida con uno dei significati di $\varphi_i(A'_1, \ldots, A'_N)$.

Pertanto, se indichiamo con $\Phi_i(A_1, \ldots, A_N)$ il prodotto di tutti i significati distinti che può ammettere $\varphi_i(A_1, \ldots, A_N)$, si avrà evidentemente (avendo le $A'$ lo stesso grado di generalità delle $A$):

$$\Phi_i(A'_1, \ldots, A'_N) = \Phi_i(A_1, \ldots, A_N) \qquad , i = 1, 2, \ldots, N-n^2, \qquad (7)$$

ed è chiaro che le $\Phi_i$ sono ora funzioni *razionali* delle $A_1, \ldots, A_N$.

La (7) ci dicono dunque che *le funzioni razionali* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{N-n^2}$ *dei coefficienti* $A_1, A_2, \ldots, A_{N^2}$ *sono altrettanti invarianti assoluti del sistema delle forme fondamentali.*

79. Non possiamo asserire che gli $N-n^2$ invarianti assoluti razionali così costruiti siano indipendenti, cioè suscettibili di assumere altrettanti valori arbitrariamente fissati, disponendo opportunamente delle $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Si consideri però che, oltre alla funzione $\Phi_i$ prodotto dei significati differenti $\varphi'_i, \varphi''_i, \ldots, \varphi_i^{(\lambda)}$ che può assumere $\varphi_i$, si potranno considerare anche le altre funzioni simme-

triche elementari:

$$\Phi_i' = \varphi_i' + \varphi_i'' + \cdots + \varphi_i^{(\lambda)}$$

$$\Phi_i'' = \varphi_i'\varphi_i'' + \varphi_i'\varphi_i''' + \varphi_i''\varphi_i''' + \cdots$$

. . . . . .

che sono dei pari funzioni razionali delle $A_1, A_2, \ldots, A_N$. È chiaro che $\varphi_i$ sarà una funzione delle $\Phi_i', \Phi_i'', \ldots$, poichè essa è radice dell'equazione:

$$\varphi_i^{\lambda} + \Phi_i'\varphi_i^{\lambda-1} + \Phi_i''\varphi_i^{\lambda-2} + \cdots + \Phi_i = 0. \qquad (8)$$

Le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$ sono dunque funzioni algebriche degl'invarianti assoluti razionali

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1', \ \Phi_1'', \ \Phi_1''', \ \ldots \\ \Phi_2', \ \Phi_2'', \ \Phi_2''', \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

onde fra tutti questi ultimi invarianti assoluti ve ne saranno almeno $N-n^2$ fra loro indipendenti, senza di che le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$, il cui numero è $N-n^2$, non sarebbero fra loro indipendenti. Invece le funzioni algebriche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$ sono fra loro indipendenti, poichè si possono sempre determinare i coefficienti $A_1, A_2, \ldots, A_N$ delle forme fondamentali in modo che i corrispondenti coefficienti trasformati assumano rispettivamente i valori:

$$c_1, c_2, \ldots, c_{n^2}, (A_{n^2+1}), (A_{n^2+2}), \ldots, (A_N),$$

dei quali gli ultimi $N-n^2$ siano stati prefissati ad ar-

bitrio.

80- Dimostrata così l'esistenza di $N-n^2$ invarianti assoluti razionali fra loro indipendenti, ci rimane soltanto a dimostrare che il numero degl'invarianti assoluti indipendenti non potrebbe superare $N-n^2$. Sia infatti $\psi(A_1, A_2, \dots, A_N)$ un invariante assoluto. Si dovrà avere

$$\psi(A_1, A_2, \dots, A_N) = \psi\left(c_1, c_2, \dots, c_{n^2}, (A_{n^2+1}), \dots, (A_N)\right)$$

d'onde si vede, poichè le $c_1, \dots, c_{n^2}$ non sono che dei semplici numeri ben determinati, che la $\psi(A_1, \dots, A_N)$ si può considerare come funzione delle $(A_{n^2+1}), \dots, (A_N)$; cioè che ogni invariante assoluto è funzione degli invarianti assoluti $\varphi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \varphi_{N-n^2}(A_1, \dots, A_N)$, c.d.d. *Esistono dunque, per un sistema di forme fondamentali $n^{arie}$ generali con $N$ coefficienti, precisamente $N-n^2$ invarianti assoluti razionali fra loro indipendenti; ed ogni invariante assoluto algebrico non è che una funzione di essi.*

81- Le cose dette si estendono, senza alcuna modificazione essenziale, alla ricerca del numero dei covarianti assoluti, di un sistema di forme fondamentali $n^{arie}$ con $M$ coefficienti, i quali possono anche contenere certe $\rho$ serie di variabili $x, y, \dots$. Basterà porre:

$$N = M + n\rho$$

e intendere colle $A_1, A_2, \ldots, A_N$ dei precedenti articoli non solamente gli $M$ coefficienti delle forme fondamentali, ma altresì le $np$ variabili:

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$
$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Per esempio colle $A_1, A_2, \ldots, A_{np}$ si potranno intendere le $np$ variabili e colle $A_{np+1}, A_{np+2}, \ldots$ i coefficienti delle forme fondamentali. Sarà anzi utile di ciò fare, poichè, in tal modo, fra le prime $n^2$ funzioni $f_1(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$, $f_2(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon), \ldots$ considerate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ve ne saranno certamente $np$ fra loro indipendenti per $p \leqq n$, e quindi le prime $n^2$ funzioni saranno certamente indipendenti se $p \geqq n$. E' infatti agevole di riconoscere (cfr. §. VII) che gli $np$ elementi lineari:

$$\alpha_x, \; \beta_x, \; \ldots, \; \varepsilon_x$$
$$\alpha_y, \; \beta_y, \; \ldots, \; \varepsilon_y$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sono fra loro indipendenti, per $p \geqq n$, quand' anche si considerino come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$.

Pertanto: *dato un sistema fondamentale di forme generali $n^{\text{arie}}$ con un numero totale $M$ di coefficienti, quei suoi covarianti assoluti che possono contenere, oltre ai*

coefficienti, certe $p$ serie di variabili, sono funzione di $M+np-n^2$ fra essi, e precisamente di $M+np-n^2$ covarianti assoluti razionali fra loro indipendenti.

82. Se il sistema delle forme fondamentali $f, \varphi, \ldots,$ ammette un covariante assoluto, esso ammetterà almeno un covariante intero $\Gamma$, poichè il covariante assoluto, se non è intero, è necessariamente (§. XIII) il quoziente di due covarianti interi. Se il sistema ammette qualche altro covariante intero $C$, si avrà, detti risp. $\theta$ e $\tau$ i pesi di $\Gamma$ e di $C$ e detto $D$ il modulo della sostituzione lineare:

$$C' = D^{\tau} \cdot C \qquad , \qquad \Gamma' = D^{\theta} \cdot \Gamma$$

d'onde segue facilmente:

$$\frac{C'^{\theta}}{\Gamma'^{\tau}} = \frac{C^{\theta}}{\Gamma^{\tau}}$$

e questa uguaglianza ci dice che il quoziente $\frac{C^{\theta}}{\Gamma^{\tau}}$ è un covariante assoluto dello stesso sistema di forme fondamentali.

Detto $J$ questo covariante assoluto, potremo scrivere:

$$C = \sqrt[\theta]{\Gamma^{\tau} \cdot J}$$

d'onde appare che tutti i covarianti interi ammessi dal detto sistema fondamentale si possono esprimere in funzione dei suoi covarianti assoluti e di un unico cova-

variante intero $\Gamma$. Per conseguenza: *il numero dei covarianti interi, fra loro algebricamente indipendenti, del sistema fondamentale dato, che possono contenere certe serie di variabili, è uguale (semprechè ne esista almeno uno che non sia assoluto) al numero dei covarianti assoluti, che possono contenere quelle stesse serie di variabili, accresciuto di un'unità*

83. I risultati dei precedenti articoli erano subordinati all'ipotesi che si verifichi il postulato dell'art. 77. E' però facile di vedere in qual modo essi debbano modificarsi nel caso che il postulato non fosse soddisfatto, cioè nel caso in cui fra le $N$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_N$, considerate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, non ve ne fossero $n^2$ fra loro indipendenti, ma soltanto un numero più piccolo $h$. Supposto infatti, per fissare le idee, che per siffatte funzioni indipendenti potessero scegliersi le prime $h$, cosicchè si avesse:

$$f_i(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = F_i(A_1, \ldots, A_N; f_1, f_2, \ldots, f_h), \quad \text{per } i > h,$$

il sistema delle (2) potrebbe scriversi:

$$A'_1 = f_1(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = c_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A'_h = f_h(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = c_h$$

$$A'_{h+1} = F_{h+1}(A_1, \ldots, A_N; c_1, c_2, \ldots, c_h)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A'_N = F_N(A_1, \ldots, A_N; c_1, c_2, \ldots, c_h)$$

cosicchè, se le $c_1, \ldots, c_h$ si riguardino come delle costanti numeriche da fissarsi ad arbitrio, si potranno sempre determinare, qualunque siano i coefficienti $A$, le $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ in modo da avere pei coefficienti trasformati $(A)$:

$$\left.\begin{array}{c}(A_1) = c_1\,,\ (A_2) = c_2\,, \ldots, (A_h) = c_h \\ (A_{h+1}) = \varphi_1(A_1, \ldots, A_N), \ldots, (A_N) = \varphi_{N-h}(A_1, \ldots, A_N).\end{array}\right\} (5)'$$

Da questo punto in poi si potranno ripetere le medesime deduzioni fatte negli articoli precedenti a partire dal sistema (5), e si finirà quindi per concludere che *il numero dei covarianti assoluti, che si possono formare cogli $M$ coefficienti delle forme fondamentali e colle $p$ serie di variabili, anzichè essere dato (come quando vale il postulato) da $M + np - n^2$ è ancora maggiore, e precisamente è dato da $M + np - h$.*

84. È importante di riconoscere come esista effettivamente qualche caso in cui non si verifica il postulato dell'art. 77. Il caso più semplice è quello in cui il sistema fondamentale è costituito da un'unica forma lineare binaria $f = a_x$, cosicchè $n = 2$, $M = 2$ e si cerchi il numero dei covarianti assoluti indipendenti che contengano, al più, un'unica serie di variabili $x$, cosicchè $p = 1$. Se valesse il postulato, il numero di siffatti covarianti, cioè $M + np - n^2$, esser dovrebbe nullo. Invece ne esiste certamente uno, che è la stessa forma fondamentale $a_x$. Siamo perciò sicuri

che in questo caso il postulato non è soddisfatto; cioè che le quattro funzioni che si ottengono esprimendo i coefficienti e le variabili trasformate $a_1', a_2', x_1', x_2'$ per mezzo dei coefficienti e delle variabili primitive $a_1, a_2, x_1, x_2$ e dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ della sostituzione lineare trasformatrice

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2'$$

$$x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2'$$

considerate come funzioni delle sole $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ non sono fra loro indipendenti.

In effetto si ha nel caso attuale:

$$x_1' = f_1(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \frac{\beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

$$x_2' = f_2(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \frac{\alpha_1 x_2 - \beta_1 x_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

$$a_1' = f_3(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2$$

$$a_2' = f_4(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2$$

e fra le quattro funzioni $f_1, f_2, f_3, f_4$ esiste, come è facile verificare, la relazione:

$$f_1 f_3 + f_2 f_4 = a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

Poichè è questa l'unica relazione fra le $f_1, f_2, f_3, f_4$, di queste quattro funzioni, considerate come funzioni delle sole $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, soltanto tre sono indipendenti, cioè si ha $h = 3$; epperò il numero dei covarianti assoluti con una sola serie $x$ è dato da $M + np - h = 1$.

85. Proponiamoci ora invece di cercare il numero dei covarianti del sistema di tre forme fondamentali binarie lineari:

$$f \equiv a_x \quad , \varphi = b_x \quad , \psi = c_x$$

i quali, oltre ai coefficienti delle forme possono anche contenere l'unica serie $x$, di variabili ($M = 6$, $p = 1$, $n = 2$).

Poichè i quattro coefficienti trasformati $a_1'$, $a_2'$, $b_1'$, $b_2'$, espressi coi coefficienti primitivi e coi coefficienti della sostituzione lineare, ci dànno già quattro funzioni indipendenti di questi ultimi, il postulato dell'art. 77 è certamente verificato. Esistono dunque $M + np - n^2$, cioè 4 covarianti assoluti indipendenti. Quanto ai covarianti interi, ve ne sono di assoluti, come $a_x$, $b_x$, $c_x$, e di non assoluti, come $(ab)$, $(bc)$, $(ac)$. Il numero dei covarianti interi indipendenti dev'essere però (art. 82) uguale a quello dei covarianti assoluti accresciuto di un'unità, cioè a 5.

Si vede adunque che fra i sei covarianti interi ora citati deve esistere una relazione. Ed infatti si verificherà facilmente l'identità:

$$(ab) \cdot c_x + (bc) \cdot a_x + (ca) \cdot b_x = 0 .$$

Come covarianti assoluti indipendenti si potranno prendere, per esempio, i quattro:

$$a_x \quad , \quad b_x \quad , \quad c_x \quad , \quad \frac{(ab)}{(ac)} .$$

# §.XVII. I covarianti di Cayley e l'operazione $\Omega$.

86. Sia $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \ldots; \overset{\nu}{z})$ la forma algebrica $n^{\text{esima}}$ più generale di dati ordini $m, \mu, \ldots, \nu$ nelle $n$ serie di variabili $n^{\text{esime}}$ $x, y, \ldots, z$. Possiamo porre simbolicamente (art. 48):

$$f \equiv a_x^m \, b_y^\mu \ldots e_z^\nu . \qquad (1)$$

Se $k$ è un intero positivo non superiore al più piccolo degli $n$ numeri $m, \mu, \ldots, \nu$ l'espressione simbolica:

$$(a\, b \ldots e)^k \, a_x^{m-k} \, b_y^{\mu-k} \ldots e_z^{\nu-k} \qquad (2)$$

ha un significato effettivo ben determinato, e precisamente essa ci rappresenta, come segue facilmente dalle cose viste al §.XI, un covariante della forma fondamentale (1), che indicheremo con $C_k$.

Invero se:

$$f_1 \equiv a'^m_{x'} \, b'^\mu_{y'} \ldots e'^\nu_{z'} \qquad (1)'$$

è la rappresentazione simbolica della forma algebrica $f_1$ ottenuta da $f$ mediante la sostituzione lineare

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \cdots + \alpha_n x'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \quad , (\alpha\beta\ldots\varepsilon) = D, \qquad (3) \\ x_n &= \varepsilon_1 x'_1 + \cdots + \varepsilon_n x'_n \end{aligned}$$

la funzione $C'_k$, cioè la stessa $C_k$ costruita per la $f_1$, sarà evidentemente espressa simbolicamente da:

$$C'_k \equiv (a'b' \ldots e')^k \, a'^{m-k}_{x'} \, b'^{\mu-k}_{y'} \ldots e'^{\nu-k}_{z'} . \qquad (2)'$$

Volendo ora introdurre in $C_k'$ in luogo dei simboli $a', b', \ldots, e'$ i simboli primitivi $a, b, \ldots, e$ e in luogo delle $x', y', \ldots, z'$ le $x, y, \ldots, z$, basterà (art. 61) esprimere le $a'$ colle $a$, le $b'$ colle $b$, ... mediante la sostituzione lineare controgrediente alla (3) il che ci dà:

$$(a'b'\ldots e') = D\cdot(a\,b\ldots e)$$

e al tempo stesso le $x$ colle $x'$, le $y$ colle $y'$, ... mediante la stessa (3), il che ci dà:

$$a'_{x'} = a_x \;,\quad b'_{y'} = b_y \;,\quad \ldots\ldots \;,\quad e'_{z'} = e_z \;.$$

L'espressione (2)' si viene con ciò a cambiare, a meno di una potenza di $D$, nell'espressione (2). La forma $C_k$ è dunque un covariante di $f$; e precisamente si ha:

$$C_k' = D^k\cdot C_k \;,$$

cioè $C_k$ è un covariante di peso $k$.

87. Per $k=1$ si ha in particolare il covariante:

$$C_1 \equiv (a\,b\ldots e)a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}\ldots e_z^{\nu-1}$$

che noi chiameremo il primo covariante di Cayley della forma $f$ o anche semplicemente il covariante Cayleyano di $f$, giacchè esso si può anche ricavare da $f$, fatta astrazione da un coefficiente numerico, mediante l'operazione

$$\Omega \equiv \sum \pm \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial y_2 \ldots \partial z_n} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial z_n} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

che si suole designare con $\Omega$ ed è appunto conosciuta col nome di *operazione di Cayley*. Precisamente, si ha:

$$\Omega f = m\mu \ldots \nu \cdot C_1 .$$

Si trova infatti, supponendo per fissare le idee $n = 3$:

$$\frac{\partial^3 \left\{ a_x^m b_y^\mu c_z^\nu \right\}}{\partial x_i \, \partial y_j \, \partial z_h} = m\mu\nu \cdot a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} a_i b_j c_h$$

d'onde prendendo per $i, j, h$ tutte le permutazioni dei tre indici 1, 2, 3, segue appunto:

$$\sum \pm \frac{\partial \left\{ a_x^m b_y^\mu c_z^\nu \right\}}{\partial x_i \, \partial y_j \, \partial z_h} = m\mu\nu \cdot a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \sum \pm a_i b_j c_h$$

$$= m\mu\nu \cdot (a\,b\,c) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} .$$

88. Applicando ora ai due membri dell'identità:

$$\Omega \left\{ a_x^m b_y^\mu \ldots e_z^\nu \right\} = m\mu \ldots \nu \cdot (a\,b \ldots e) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \ldots e_z^{\nu-1}$$

la stessa operazione, si trova similmente:

$$\Omega \left\{ \Omega \left\{ a_x^m b_y^\mu \ldots e_z^\nu \right\} \right\} = m\mu \ldots \nu \cdot (m-1)(\mu-1) \ldots (\nu-1) \cdot (a\,b \ldots e)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} \ldots e_z^{\nu-2} ,$$

e procedendo allo stesso modo:(*)

$$\Omega^k \left\{ a_x^m b_y^\mu \ldots e_z^\nu \right\} = m^{\overline{k}} \mu^{\overline{k}} \ldots \nu^{\overline{k}} \cdot (a\,b \ldots e)^k a_x^{m-k} b_y^{\mu-k} \ldots e_z^{\nu-k}$$

cosicchè:

---

(*) Con $x^{\overline{k}}$ designeremo ora ed in seguito la $k^{ma}$ potenza fattoriale di $x$; cioè

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2) \ldots (x+k-1) .$$

$$C_k = \frac{1}{m^k \mu^k \dots \nu^k} \cdot \Omega^k f$$

89- Se oltre alle serie $x, y, \dots z$ consideriamo altre $n$ serie ausiliarie $\xi, \eta, \dots \zeta$ indipendenti fra loro e dalle $x, y, \dots, z$ ed in luogo dell'operazione $\Omega$ consideriamo l'operazione

$$(\xi\ \eta \dots \zeta)\ \Omega_{x, y, \dots, z}$$

che consiste nell'operare su una funzione qualunque delle $x, y, \dots z$ coll'operazione $\Omega$ fra le $x, y, \dots z$ (che a scanso di equivoci si indicherà anche con $\Omega_{x, y, \dots, z}$), moltiplicare poi il risultato per $(\xi\ \eta \dots \zeta)$, possiamo scrivere:

$$(\xi\ \eta \dots \zeta)\,\Omega_{x, y, \dots, z} = \left\{ \sum \pm \xi_1\, \eta_2 \dots \zeta_n \right\} \left\{ \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial z_n} \right.$$

e applicando la regola del prodotto di due determinanti:

$$(\xi\ \eta \dots \zeta)\Omega = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{x\xi} & \mathcal{D}_{x\eta} & \dots & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{y\eta} & \dots & \mathcal{D}_{y\zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{z\eta} & \dots & \mathcal{D}_{z\zeta} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

dove il significato del secondo membro non può essere equivoco, giacchè le operazioni di polare elementari che vi figurano sono tutte permutabili fra loro due a due.

90- Se dunque $F$ è una funzione qualunque delle variabili $x, y, \dots, z$ ed $F_1$ è la funzione delle $x', y', \dots, z'$ in cui si cambia la $F$ mediante le sostituzioni (3), si avrà:

$$(\xi\ \eta \cdots \zeta)\,\Omega_{xy\ldots z} F = \sum \pm\, \mathcal{D}_{x\xi}\, \mathcal{D}_{y\eta} \cdots \mathcal{D}_{z\zeta} F$$

e similmente:

$$(\xi'\ \eta' \cdots \zeta)\,\Omega_{x'y'\ldots z'} F_1 = \sum \pm\, \mathcal{D}_{x'\xi'}\, \mathcal{D}_{y'\eta'} \cdots \mathcal{D}_{z'\zeta'} F_1 .$$

Da queste due eguaglianze, poichè i loro secondi membri sono uguali (art. 35) segue:

$$(\xi\ \eta \cdots \zeta)\,\Omega_{xy\ldots z} F = (\xi'\ \eta' \cdots \omega')\,\Omega_{x'y'\ldots z'} F_1$$

e quindi anche, poichè $(\xi\ \eta \cdots \omega) = (\alpha\ \beta \cdots \varepsilon)(x'y' \ldots z')$:

$$\Omega_{x'y'\ldots z'} F_1 = \mathcal{D} \cdot \Omega_{xy\ldots z} F .$$

Il carattere invariantivo dell'operazione $\Omega$ resta così nuovamente dimostrato, in modo anche più generale, poichè $F$ è qui una funzione qualunque delle $x, y, \ldots z$.

91. *L'operazione $\Omega_{xy\ldots z}$ è permutabile colle operazioni di polare elementari formate colle stesse serie $x\ y \ldots z$, ad eccezione delle operazioni improprie $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \ldots, \mathcal{D}_{zz}$*

Poichè, come appare dalla (4), il risultato dell'operazione potrà soltanto, tutto al più, cambiare di segno per uno scambio qualunque fra le $x, y, \ldots, z$, basterà dimostrare la sua permutabilità con $\mathcal{D}_{yx}$ perchè essa sia al tempo stesso dimostrata anche per $\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{yz}, \ldots$

Poniamo scrivere primieramente:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{yx} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{D}_{yx} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{D}_{yx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} \quad (7)$$

convenendo d'ora innanzi che in ogni termine dello sviluppo di un determinante operativo gli elementi operativi che lo compongono si scriveranno nell'ordine stesso delle verticali cui appartengono. Ma si ha evidentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}_{yx} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\} =$$

$$(8) \qquad = \frac{\partial}{\partial y_i} + \left\{x_1\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial x_i} + x_2\frac{\partial^2}{\partial y_2\partial x_i} + \cdots + x_n\frac{\partial^2}{\partial y_n\partial x_i}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_i} + \left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde, sostituendo in (7):

$$(9) \qquad \Omega\cdot\mathcal{D}_{yx} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_1} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_2} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial}{\partial y_n} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

poichè si ha evidentemente:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0$$

Ma l'operazione $\mathcal{D}_{yx}$ è permutabile colle derivazioni

255537

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

che non implicano la serie $x$; quindi la (9) può anche scriversi:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

cioè ci dà appunto:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx}\, \Omega$$

c. d. d.

92. Per $y \equiv x$ la (8) ci darebbe:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{D}_{xx} \frac{\partial}{\partial x_i};$$

cosicchè si avrebbe in luogo della (9):

$$\Omega \mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_{xx} \Omega + \Omega = (1 + \mathcal{D}_{xx}) \Omega.$$

---

## §. XVIII. *Riduzione dell'operazione $\Omega_{xy\ldots z}$ ad operazioni di polare fra le stesse $x, y, \ldots, z$. - L'operazione $H_{xy\ldots z}$ -*

93. Sia $f$ una funzione qualunque delle $n$ serie di variabili $n^{\text{azie}}$ $x, y, \ldots, z$, la quale non dipenda dalle $n$ serie ausiliarie $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Si ha, secondo la (6) del §. precedente:

$$(\xi\,\eta\,\ldots\omega)\cdot\Omega f=\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}f$$

d'onde, operando sui due membri coll'operazione

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}$$

e tenendo presente che $\Omega f$ è indipendente dalle $\xi, \eta, \ldots, \zeta$:

$$(x\,y\ldots z)\cdot\Omega f=\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}f \quad (1)$$

poichè:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}(\xi\,\eta\ldots\zeta)=(x\,y\ldots z).$$

Il secondo membro di (1) essendo ottenuto da $f$ con operazioni di polare fra le serie $x, y, \ldots, z, \xi, \eta, \ldots \zeta$, delle quali le $\xi, \eta, \ldots \zeta$ non sono contenute in $f$ si può anche dedurre con operazione di polare (art. 52) fra le sole $x, y, \ldots z$. A tale oggetto si trasformerà l'operazione:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}$$

mediante le formole fondamentali del §. XIII art. 20 in modo che vengano eseguite per prime quelle operazioni elementari il cui primo indice è una delle $\xi, \eta, \ldots \zeta$. Si otterrà così:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}=H_{xy\ldots z}+K_{xy\ldots z\xi\ldots\zeta} \quad (2)$$

dove $H$ è un'operazione di polare fra le sole $x, y, \ldots, z$ e $K$ un'operazione di polare che annulla identicamente le funzioni che non dipendono dalle $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Sostituendo in (1) si avrà dunque:

$$(x\,y\ldots z)\cdot\Omega_{xy\ldots z}f=H_{xy\ldots z}f$$

onde, poichè $f$ è una funzione affatto arbitraria delle $x, y, \ldots z$, si potrà anche scrivere identicamente:

$$(x\,y \ldots z)\,\Omega_{xy\ldots z} = H_{xy\ldots z}. \tag{3}$$

L'operazione $\Omega$ si può così surrogare con un'operazione di polare, cioè coll'operazione $H$, che si potrà calcolare secondo la (2). L'operazione $H$, a differenza di $\Omega$, è, come ben si vede, simmetrica nelle $x, y, \ldots, z$.

94 - Calcoliamo, per esempio, l'operazione $H$ per $n = 2$, cioè l'espressione effettiva di $H_{xy}$.

Si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\left\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\right\} =$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi}. \tag{4}$$

Applicando ora alla prima parte del secondo membro le note formole fondamentali, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} =$$
$$= \left[\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{\xi\xi}\right]\cdot\left[\mathcal{D}_{y\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\eta\eta}\right] \tag{5}$$
$$= \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + K_1,$$

dove $K_1$ è un'operazione di polare che annulla le funzioni delle sole $x, y$.

Quanto alla seconda parte, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{\xi x}\left[\mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{xy}\right]\mathcal{D}_{y\xi}$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\xi} + \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi}.$$

La prima parte non ha uopo di essere trasformata, poichè

essa annulla già le funzioni indipendenti da $\eta$; per la seconda si scriverà:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi} = [\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x} - \mathcal{D}_{\xi y}]\mathcal{D}_{y\xi}$$

$$= \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{y\xi} - \mathcal{D}_{\xi\eta}\mathcal{D}_{y\xi}$$

$$= \mathcal{D}_{xy}[\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{yx}] - [\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\xi\xi}]$$

onde:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yy} + K_2\,, \qquad (6)$$

dove $K_2$ annulla le funzioni delle sole $x, y$.

Sostituendo le espressioni (5) e (6) in (4) si trova:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} + K_1 + K_2\,,$$

onde si conclude:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} \qquad (7)$$

$$K_{xy\xi\eta} = K_1 + K_2\,.$$

95. Poichè l'operazione $H_{xy}$ è simmetrica, come si è già notato, rispetto alle serie $x$ ed $y$, si potrà anche scrivere in luogo di (7), scambiando in (7) le $x$ colle $y$:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}\,. \qquad (7)'$$

E' del resto assai facile verificare l'identità delle due operazioni (7) e (7)'.

96. Per ottenere l'espressione dell'operazione $H$ con un numero qualsivoglia di serie di variabili, partiremo (limitandoci, per es., per meglio fissare le idee, al caso di 4 serie $x, y, z, t$) dall'uguaglianza:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\mathcal{D}_{\tau t}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

che è un'identità, come si è già visto, semprechè i due membri vengano applicati ad una funzione qualunque delle sole $x, y, z, t$ (indipendente, cioè, dalle serie ausiliarie $\xi, \eta, \zeta, \tau$). Ricordiamo, secondo quanto si è già detto anche al §. precedente (art. 91) che i fattori operativi di un termine qualunque dello sviluppo del determinante (8) si intendano scritti in un ordine ben determinato, cioè, andando da destra verso sinistra (che è l'ordine secondo il quale essi dovranno eseguirsi), prima quello della 4ª verticale, poi quello della 3ª, poi quello della 2ª e per ultimo quello della 1ª; e lo stesso s'intende detto, una volta per sempre, per tutti i determinanti operativi che ci si presenteranno in seguito.

Ciò posto, è chiaro che potremo anche scrivere:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\tau} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

rimutando (art. 20) le due operazioni elementari di cui

impone ogni elemento della 1ª verticale:

$$
{}_t = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}
\begin{vmatrix}
\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
\mathcal{D}_{t\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
\mathcal{D}_{t\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
\mathcal{D}_{t\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}
\begin{vmatrix}
-\mathcal{D}_{\tau\tau}+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
-\mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
-\mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
-\mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

; quando si opera su funzioni indipendenti da $\tau$, si

dentificamente:

$$
\begin{vmatrix}
{}_{\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
{}_{\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
{}_{\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
{}_{\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
\mathcal{D}_{t\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
\mathcal{D}_{t\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
\mathcal{D}_{t\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{xy\ldots z}F=\sum\pm\,\mathcal{D}_{x\xi}\,\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}F$$

e similmente:

$$(\xi'\,\eta'\ldots\zeta)\,\Omega_{x'y'\ldots z'}F_1=\sum\pm\,\mathcal{D}_{x'\xi'}\,\mathcal{D}_{y'\eta'}\ldots\mathcal{D}_{z'\zeta'}F_1\,.$$

Da queste due eguaglianze, poichè i loro secondi membri sono uguali (art. 35) segue:

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{xy\ldots z}F=(\xi'\,\eta'\ldots\omega')\,\Omega_{x'y'\ldots z'}F_1$$

e quindi anche, poichè $(\xi\,\eta\ldots\omega)=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)(x'y'\ldots z')$:

$$\Omega_{x'y'\ldots z'}F_1=\mathcal{D}\cdot\Omega_{xy\ldots z}F\,.$$

Il carattere invariantivo dell'operazione $\Omega$ resta così nuovamente dimostrato, in modo anche più generale, poichè $F$ è qui una funzione qualunque delle $x, y, \ldots z$.

91. *L'operazione $\Omega_{xy\ldots z}$ è permutabile colle operazioni di polare elementari formate colle stesse serie $x\ y\ldots z$, ad eccezione delle operazioni improprie $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \ldots, \mathcal{D}_{zz}$.*

Poichè, come appare dalla (4), il risultato dell'operazione potrà soltanto, tutto al più, cambiare di segno per uno scambio qualunque fra le $x, y, \ldots, z$, basterà dimostrare la sua permutabilità con $\mathcal{D}_{yx}$ perchè essa sia al tempo stesso dimostrata anche per $\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{yz}, \ldots$

Possiamo scrivere primieramente:

$$\Omega\cdot\mathcal{D}_{yx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial}{\partial y_1}&\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\cdots\frac{\partial}{\partial y_2}&\frac{\partial}{\partial x_2}\\ \cdots&\cdots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\cdots\frac{\partial}{\partial y_n}&\frac{\partial}{\partial x_n}\end{vmatrix}\mathcal{D}_{yx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial}{\partial y_1}&\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{D}_{yx}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\cdots\frac{\partial}{\partial y_2}&\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{D}_{yx}\\ \cdots&\cdots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\cdots\frac{\partial}{\partial y_n}&\frac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{D}_{yx}\end{vmatrix}\quad(7)$$

convenendo d'ora innanzi che in ogni termine dello sviluppo di un determinante operativo gli elementi operativi che lo compongono si scriveranno nell'ordine stesso delle verticali cui appartengono. Ma si ha evidentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}_{yx} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\} =$$

$$(8) \qquad = \frac{\partial}{\partial y_i} + \left\{x_1\frac{\partial^2}{\partial y_1\,\partial x_i} + x_2\frac{\partial^2}{\partial y_2\,\partial x_i} + \dots + x_n\frac{\partial^2}{\partial y_n\,\partial x_i}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_i} + \left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde, sostituendo in (7):

$$(9) \qquad \Omega\cdot\mathcal{D}_{yx} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_1} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_2} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial}{\partial y_n} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

poichè si ha evidentemente:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0$$

Ma l'operazione $\mathcal{D}_{yx}$ è permutabile colle derivazioni

255537

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

che non implicano la serie $x$; quindi la (9) può anche scriversi:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

cioè ci dà appunto:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx}\, \Omega$$

c. d. d.

92. Per $y \equiv x$ la (8) ci darebbe:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{D}_{xx} \frac{\partial}{\partial x_i};$$

cosicchè si avrebbe in luogo della (9):

$$\Omega \mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_{xx} \Omega + \Omega = (1 + \mathcal{D}_{xx}) \Omega.$$

---

## §. XVIII. *Riduzione dell'operazione $\Omega_{xy\ldots z}$ ad operazioni di polare fra le stesse $x, y, \ldots, z$. - L'operazione $H_{xy\ldots z}$ -*

93. Sia $f$ una funzione qualunque delle $n$ serie di variabili $n^{\text{azie}}$ $x, y, \ldots, z$, la quale non dipenda dalle $n$ serie ausiliarie $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Si ha, secondo la (6) del §. precedente:

$$(\xi\,\eta\,\ldots\,\omega)\cdot\Omega f=\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}f$$

d'onde, operando sui due membri coll'operazione

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}$$

e tenendo presente che $\Omega f$ è indipendente dalle $\xi,\eta,\ldots,\zeta$:

$$(x\,y\ldots z)\cdot\Omega f=\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}f \quad (1)$$

poichè:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}(\xi\,\eta\ldots\zeta)=(x\,y\ldots z).$$

Il secondo membro di (1) essendo ottenuto da $f$ con operazioni di polare fra le serie $x,y,\ldots,z,\xi,\eta,\ldots\zeta$, delle quali le $\xi,\eta,\ldots\zeta$ non sono contenute in $f$ si può anche dedurre con operazione di polare (art. 52) fra le sole $x,y,\ldots z$. A tale oggetto si trasformerà l'operazione:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}$$

mediante le formole fondamentali del §. XIII art. 20 in modo che vengano eseguite per prime quelle operazioni elementari il cui primo indice è una delle $\xi,\eta,\ldots\zeta$. Si otterrà così:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\ldots\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}\right\}=H_{xy\ldots z}+K_{xy\ldots z\xi\ldots\zeta} \quad (2)$$

dove $H$ è un'operazione di polare fra le sole $x,y,\ldots,z$ e $K$ un'operazione di polare che annulla identicamente le funzioni che non dipendono dalle $\xi,\eta,\ldots,\zeta$. Sostituendo in (1) si avrà dunque:

$$(x\,y\ldots z)\cdot\Omega_{xy\ldots z}f=H_{xy\ldots z}f$$

onde, poichè $f$ è una funzione affatto arbitraria delle $x, y, \ldots z$, si potrà anche scrivere identicamente:

$$(x\,y \ldots z)\,\Omega_{xy\ldots z} = H_{xy\ldots z}. \tag{3}$$

L'operazione $\Omega$ si può così surrogare con un'operazione di polare, cioè coll'operazione $H$, che si potrà calcolare secondo la (2). L'operazione $H$, a differenza di $\Omega$, è, come ben si vede, simmetrica nelle $x, y, \ldots, z$.

94 - Calcoliamo, per esempio, l'operazione $H$ per $n = 2$, cioè l'espressione effettiva di $H_{xy}$.

Si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\left\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\right\} =$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi}. \tag{4}$$

Applicando ora alla prima parte del secondo membro le note formole fondamentali, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} =$$
$$= \left[\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{\xi\xi}\right]\cdot\left[\mathcal{D}_{y\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\eta\eta}\right] \tag{5}$$
$$= \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + K_1,$$

dove $K_1$ è un'operazione di polare che annulla le funzioni delle sole $x, y$.

Quanto alla seconda parte, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{\xi x}\left[\mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{xy}\right]\mathcal{D}_{y\xi}$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{x\eta}\,\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\xi} + \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi}.$$

La prima parte non ha uopo di essere trasformata, poichè

x annulla già le funzioni indipendenti da $\eta$; per la secon-
si scriverà:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi} = [\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x} - \mathcal{D}_{\xi y}]\mathcal{D}_{y\xi}$$

$$= \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{y\xi} - \mathcal{D}_{\xi\eta}\mathcal{D}_{y\xi}$$

$$= \mathcal{D}_{xy}[\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{yx}] - [\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\xi\xi}]$$

da:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yy} + K_2\,, \qquad (6)$$

e $K_2$ annulla le funzioni della sola $x, y$.

stituendo le espressioni (5) e (6) in (4) si trova:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} + K_1 + K_2\,,$$

e si conclude:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} \qquad (7)$$

$$K_{xy\xi\eta} = K_1 + K_2\,.$$

Poichè l'operazione $H_{xy}$ è simmetrica, come si è già
ato, rispetto alle serie $x$ ed $y$, si potrà anche scrivere
luogo di (7), scambiando in (7) le $x$ colle $y$:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}\,. \qquad (7)'$$

del resto assai facile verificare l'identità delle due
razioni (7) e (7)'.

Per ottenere l'espressione dell'operazione $H$ con un
mero qualsivoglia di serie di variabili, partiremo (li-
tandoci, per es., per meglio fissare le idee, al caso di
erie $x, y, z, t$) dall'uguaglianza:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\mathcal{D}_{\tau t}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

che è un'identità, come si è già visto, semprechè i due membri vengano applicati ad una funzione qualunque delle sole $x, y, z, t$ (indipendente, cioè, dalle serie ausiliarie $\xi, \eta, \zeta, \tau$). Ricordiamo, secondo quanto si è già detto anche al §. precedente (art. 91) che i fattori operativi di un termine qualunque dello sviluppo del determinante (8) si intendano scritti in un ordine ben determinato, cioè, andando da destra verso sinistra (che è l'ordine secondo il quale essi dovranno eseguirsi), prima quello della 4ª verticale, poi quello della 3ª, poi quello della 2ª e per ultimo quello della 1ª; e lo stesso s'intende detto, una volta per sempre, per tutti i determinanti operativi che ci si presenteranno in seguito.

Ciò posto, è chiaro che potremo anche scrivere:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

unitando (art. 20) le due operazioni elementari di cui

mpone ogni elemento della 1ª verticale:

$$
{}_{:t} = \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}
\begin{vmatrix}
\mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
\mathcal{D}_{t\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
\mathcal{D}_{t\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
\mathcal{D}_{t\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}
\begin{vmatrix}
-\mathcal{D}_{\tau\tau}+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
-\mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
-\mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
-\mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

, quando si opera su funzioni indipendenti da $\tau$, si

dentificamente:

$$
\begin{vmatrix}
{}_{\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
{}_{t\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
{}_{\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
{}_{\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\
\mathcal{D}_{t\zeta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\
\mathcal{D}_{t\eta}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\
\mathcal{D}_{t\xi}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi}
\end{vmatrix}
$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix},$$

poichè:

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{z\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{y\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{x\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} =$$

Pertanto possiamo anche scrivere:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z} \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}\right\},$$

indi anche:

$$_{zt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

'tra parte si ha (semprechè si operi su funzioni indi-
venti dalla serie 16):

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} ;$$

come segue dalle uguaglianze operative:

$$- \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{z\tau} = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{y\tau}$$

$$= - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{x\tau} = - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Concludiamo dunque:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}.$$

97. Venendo ora all'eliminazione della serie $\zeta$, il che si può fare con procedimento affatto simile a quello tenuto testè, si trova dapprima:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & \mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$-\mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{\zeta t} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{\zeta\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{\zeta\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{\zeta\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}.$$

Osservando poi che il secondo determinante nel secondo membro si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{\zeta t} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{\zeta\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{\zeta\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

si conchiude:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\eta y}\, \mathcal{D}_{\xi x} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Finalmente si eliminerà, sempre allo stesso modo, la serie $\eta$ e si otterrà:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Quanto all'eliminazione di $\xi$, essa è immediata, onde si ha ormai già il risultato finale:

$$H_{xyzt} = \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Per $H_{xy}$ si avrà dunque semplicemente:

$$H_{xy} = \begin{vmatrix} 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} = (1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$$

e già si era trovato sopra.

$H_{xyz}$ si avrà:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \quad (10)$$

sviluppando il determinante:

$$_{xz} = (2+\mathcal{D}_{zz})(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} - (2+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$$

$$\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xz}. \quad (10)'$$

All'operazione $H$ si può anche dare (limitan-
i come sopra, per fissare le idee, al caso di quat-
serie) la forma:

$$H_{xyzt} = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{xx} & \mathcal{D}_{xy} & \mathcal{D}_{xz} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{yx} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{yt} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{zy} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{zt} \\ \mathcal{D}_{tx} & \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{tz} & 3+\mathcal{D}_{tt} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Non ci rattenniamo a dimostrare questa seconda espressione(*), che, del resto, non avremo in seguito occasione a richiamare. Essa ci dà per $H_{xyz}$ in luogo di (10)' lo sviluppo:

$$H_{xyz} = \mathcal{D}_{xx}(1+\mathcal{D}_{yy})(2+\mathcal{D}_{zz}) - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}(2+\mathcal{D}_{zz}) + \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}$$
$$- \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz} - \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xz} + \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xz} \qquad (10)''$$

e non è difficile verificare, mediante le solite formole, l'equivalenza delle due operazioni (10)' e (10)'', bastando a tale oggetto di verificare che:

$$\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz} = \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz} + \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xz}\,.$$

100. Nel mentre che l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$, definita al §. prec., fra le $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ ha significato soltanto nel caso in cui la specie delle serie è ugua-

---

(*) La dimostrazione si trova data unitamente a quella qui riportata, dell'espressione (9) nella memoria di Capelli: *Ueber die Zurück Führung der Cayley'schen Opération $\Omega$ auf gewöhnliche Polar-Operationen* (Mathem. Annalen. Bd. XXIX, 1887)

le allo stesso numero $n$, la corrispondente operazione $H_{xyz\ldots t}$ ha un significato ben determinato, qualunque sia la specie delle $n$ serie, giacchè nell'espressione di $H_{xyz\ldots t}$ da noi trovata

$$H_{xyz\ldots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+\mathcal{D}_{tt} & \ldots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{tz} & & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

le operazioni elementari $\mathcal{D}_{pq}$ hanno appunto un significato ben determinato anche se la specie delle serie $p$ e $q$ non sia eguale ad $n$.

101. *Se la specie comune $\nu$ delle $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots t$ è inferiore ad $n$, si ha identicamente:*

$$H_{xyz\ldots t} = 0,$$

*cioè l'operazione $H_{xyz\ldots t}$ applicata a qualsiasi funzione delle $n \cdot \nu$ variabili $x, y, z, \ldots t$ dà identicamente lo zero.*

Sappiamo, infatti, che l'operazione (12), applicata ad una funzione qualunque delle $x, y, z, \ldots t$, dà un risultato identico a quello che si otterrebbe, applicando alla stessa funzione l'operazione:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \tag{13}$$

essendo le $\xi, \eta, \zeta \ldots \tau$ delle serie ausiliarie non contenute nella funzione su cui si opera. Ora, per $\nu < n$, si ha appunto identicamente, per un noto teorema sul prodotto di due matrici simili:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \equiv 0$$

102 - *Se la specie comune $\nu$ delle $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots$ è uguale o superiore ad $n$, si ha identicamente:*

$$H_{xyz\ldots t} = \sum_{i,h,\ldots k} \begin{vmatrix} x_i & x_h & \cdots & x_k \\ y_i & y_h & & y_k \\ z_i & z_h & & z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_i & t_h & & t_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} & \frac{\partial}{\partial z_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} \tag{14}$$

*dove la sommatoria va estesa a tutte le $\binom{\nu}{n}$ combinazioni d[redacted]i*

$\nu$ indici $1, 2, \ldots \nu$, aggruppati ad $n$ ad $n$.

Infatti, il teorema sul prodotto di due matrici simili ci dà per $\nu \geqq n$:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = \sum_{i,\ldots,k} \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k \\ \eta_i & \eta_k \\ \zeta_i & \zeta_k \\ \vdots & \vdots \\ \tau_i & \tau_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} & & \frac{\partial}{\partial z_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tau_i} & & \frac{\partial}{\partial \tau_k} \end{vmatrix}$$

d'onde operando su entrambi i membri con $\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t}$ segue appunto la (14), poichè:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t} \begin{vmatrix} \xi_i & \cdots & \xi_k \\ \eta_i & & \eta_k \\ \zeta_i & & \zeta_k \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_i & & \tau_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \cdots & x_k \\ y_i & & y_k \\ z_i & & z_k \\ \vdots & & \vdots \\ t_i & & t_k \end{vmatrix}.$$

103. L'espressione (14) dell'operazione $H_{xyz\ldots t}$ mette in evidenza che essa è simmetrica rispetto alle serie $x, y, z, \ldots t$. Aggiungiamo ora che *l'operazione $H_{xyz\ldots t}$ è permutabile con tutte le operazioni di polare elementari (proprie ed improprie) che si possono formare colle serie $x, y, z, \ldots t$ e quindi con qualsiasi operazione di polare* (art. 34) fra le $x, y, z, \ldots t$. Infatti, se $p, q$ sono due serie distinte scelte fra le $x, y, z, \ldots t$, si dimostrerà, assolutamente, come al §. 17, che:

$$\mathcal{D}_{pq}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix}$$

onde la (14) ci darà evidentemente:

$$\mathcal{D}_{pq}\, H_{xyz\ldots t} = H_{xyz\ldots t}\, \mathcal{D}_{pq},$$

e che (per $p \equiv x, y, z, \ldots t$):

$$\mathcal{D}_{pp}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} (\mathcal{D}_{pp}$$

onde la (14) ci dà anche in questo caso:

$$\mathcal{D}_{pp}\, H_{xyz\ldots t} = H_{xyz\ldots t}\, \mathcal{D}_{pp}$$

poichè:

$$\mathcal{D}_{pp}\begin{vmatrix} x_i & x_h & \cdots & x_k \\ y_i & y_h & \cdots & y_k \\ z_i & z_h & \cdots & z_k \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i & t_h & \cdots & t_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & x_h & \cdots & x_k \\ y_i & y_h & \cdots & y_k \\ z_i & z_h & \cdots & z_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i & t_h & \cdots & t_k \end{vmatrix}$$

## §.XIX. *Altre operazioni di polare permutabili con ogni operazione di polare fra le stesse serie di variabili.*

105. L'operazione $H_{xyz\ldots t}$ non è la sola operazione di polare fra le $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$ che goda della proprietà di essere permutabile con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili. Consideriamo infatti in luogo dell'operazione (12) del §. preced. l'operazione più generale, che indicheremo con $H^{(p)}$:

$$H^{(p)}_{xyz\ldots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+p+\mathcal{D}_{tt} & \ldots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{tz} & \ldots & 2+p+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \ldots & \mathcal{D}_{zy} & 1+p+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \ldots & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & p+\mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \quad (1)$$

in cui $p$ è una costante da determinarsi ad arbitrio, cosicchè sarà in particolare per $p=0$

$$H^{(0)}_{xyz\ldots t} = H_{xyz\ldots t}.$$

Ci proponiamo di dimostrare che *l'operazione $H^{(p)}$ così definita è anch'essa permutabile con ogni operazione di polare fra le $x, y, z, \ldots t$, comunque si fissi il valore del parametro $p$.*

106. A tale oggetto cominceremo dal dimostrare che se la operazione $H^{(p)}_{xyz\ldots t}$ è permutabile con ogni altra operazione di polare fra le $x, y, z, \ldots, t$, anche l'operazione $H^{(p+1)}_{xyz\ldots t}$ lo sarà del pari.

Invero, detta $f$ una funzione qualunque delle $n$ serie di variabili $x, y, z, \dots t$ (la cui specie supponiamo $\geqq n$), si ha identicamente:

$$(2) \qquad H^{(p)}_{xyz\dots t}\left\{(xyz\dots t)\cdot f\right\} = (xyz\dots t)\cdot\left\{H^{(p+1)}_{xyz\dots t} f\right\}$$

poichè il determinante $(xyz\dots t) \equiv \sum \pm x_1 y_2 z_3 \dots t_n$ è annullato da ogni operazione $\mathcal{D}_{pq}$ in cui $p$ e $q$ siano due serie distinte scelte fra le $x, y, z, \dots t$, cosicchè:

$$\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\dots t)\cdot f\right\} = (xyz\dots t)\cdot\left\{\mathcal{D}_{pq} f\right\}$$

e viene invece riprodotto inalterato dalle $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \dots, \mathcal{D}_{tt}$, cosicchè p. es.

$$\mathcal{D}_{xx}\left\{(xyz\dots t)\cdot f\right\} = (xyz\dots t)\cdot f + (xyz\dots t)\cdot\left\{\mathcal{D}_{xx} f\right\}$$

$$= (xyz\dots t)\left\{(1+\mathcal{D}_{xx})f\right\}.$$

Sostituendo ora in (2) in luogo di $f$ la funzione $\mathcal{D}_{pq} f$, si ha:

$$H^{(p)}\left\{(xyz\dots t)\cdot \mathcal{D}_{pq} f\right\} = (xyz\dots t)\left\{H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f\right\}$$

e quindi anche:

$$(3) \begin{cases} (xyz\dots t)\cdot H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f = H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\dots t) f\right\} & \text{per } p \neq q \\ (xyz\dots t)\cdot H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pp} f = H^{(p)}(\mathcal{D}_{pp}-1)\left\{(xyz\dots t) f\right\}. \end{cases}$$

D'altra parte, essendo per ipotesi $H^{(p)}$ permutabile con $\mathcal{D}_{pq}$, si può scrivere:

$$H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\dots t)\cdot f\right\} = \mathcal{D}_{pq} H^{(p)}\left\{(xyz\dots t) f\right\}$$

e applicando nuovamente la (2):

$$H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\ldots t)f\right\}=\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\ldots t)\cdot H^{(p+1)}f\right\},$$

d'onde:

$$(4)\quad\begin{cases} H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\left\{(xyz\ldots t)f\right\}=(xyz\ldots t).\,\mathcal{D}_{pq}H^{(p+1)}f & \text{per } p \\ H^{(p)}\mathcal{D}_{pp}\left\{(xyz\ldots t)f\right\}=(xyz\ldots t)\cdot(\mathcal{D}_{pp}+1)H^{(p+1)}f. \end{cases}$$

Pertanto segue dalla (3) e (4)

$$(xyz\ldots t)H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq}f=(xyz\ldots t)\mathcal{D}_{pq}H^{(p+1)}f,$$

e

comunque si scelgano le $p$ e $q$ fra le $x, y, z, \ldots t$; e quindi poichè $(xyz\ldots t)$ non è identicamente nullo:

$$H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq}f=\mathcal{D}_{pq}H^{(p+1)}f.$$

Resta con ciò dimostrato che anche l'operazione $H^{(p+1)}$ sarà permutabile con ogni operazione di polare fra le $x, y, z, \ldots t$.

36. Poichè ora l'operazione $H^{(0)}=H_{xyz\ldots t}$ è effettivamente permutabile, come sappiamo, con ogni operazione di po-
re fra le $x, y, z, \ldots t$, ne consegue in virtù del lemma te-
dimostrato, che lo sarà del pari l'operazione $H^{(1)}$; quin-
sempre in virtù dello stesso lemma applicato più
e di seguito, lo saranno tutte le infinite ope-
oni: $H^{(2)}, H^{(3)}, H^{(4)}, \ldots$
razione generale $H^{(p)}$ godrà dunque di tale permuta-
per tutti i valori interi e positivi di $p$; e di qui se-
ilmente per un noto principio algebrico, essendo $H^{(p)}$ del grado

limitato $n$ rispetto al parametro $\rho$, che $H^{(\rho)}$ dovrà godere della stessa permutabilità per ogni valore attribuito a $\rho$, come appunto volevasi dimostrare.

Ed invero, sia:

$$(5) \qquad H^{(\rho)}_{xyz\ldots t} = \rho^n + \rho^{n-1} \cdot K_1 + \rho^{n-2} \cdot K_2 + \ldots + \rho \cdot K_{n-1} + K_n$$

lo sviluppo del determinante (1) ordinato secondo le potenze decrescenti del parametro $\rho$. Se $f$ è una funzione qualunque delle $x, y, z, \ldots, t$, si ha, per quanto si è dimostrato, per ogni valore intero e positivo di $\rho$:

$$\rho^{n-1} \cdot \mathcal{D}_{pq} K_1 f + \rho^{n-2} \cdot \mathcal{D}_{pq} K_2 f + \ldots + \rho \cdot \mathcal{D}_{pq} K_{n-1} f + \mathcal{D}_{pq} K_n f$$

$$= \rho^{n-1} \cdot K_1 \mathcal{D}_{pq} f + \rho^{n-2} \cdot K_2 \mathcal{D}_{pq} f + \ldots + \rho \cdot K_{n-1} \mathcal{D}_{pq} f + K_n \mathcal{D}_{pq} f$$

È questa rispetto al parametro $\rho$ un'equazione algebrica del grado $n-1$, che ammette le infinite soluzioni $\rho = 1, 2, 3, \ldots$; essa dev'essere dunque soddisfatta identicamente per ogni valore di $\rho$, cioè dev'essere separatamente:

$$\mathcal{D}_{pq} K_i f = K_i \mathcal{D}_{pq} f \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

*Abbiamo così riconosciuta l'esistenza delle $n$ operazioni di polare fra le $n$ serie $x, y, z, \ldots t$:*

$$(6) \qquad K_1, K_2, \ldots, K_n,$$

*(l'ultima delle quali $K_n$ non è altro che la stessa $K_{xyz\ldots t}$) ciascuna delle quali gode della proprietà di essere permutabile con ogni operazione di po-*

'are fra le stesse n serie.(*)

07. Nella dimostrazione da noi data abbiamo supposto che la specie delle $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$ fosse $\geqq n$. Non è però necessario di cercare un'altra dimostrazione per il caso in cui essa fosse $< n$, in virtù del seguente principio generale, di cui è ben facile riconoscere l'esattezza: *Se $\Delta$ è un'operazione di polare fra certe serie $x, y, z, \ldots, t$ (cioè un composto razionale intero a coefficienti costanti delle operazioni $\mathcal{D}_{pq}$ formabili con queste serie), e se l'identità $\Delta = 0$ è vera quando le serie siano di una certa specie $\nu$, essa è vera altresì se la specie si supponga inferiore a $\nu$.*

Non si potrebbe ugualmente dire che l'identità $\Delta = 0$ sarà vera anche se la specie si supponga $> \nu$. Abbiamo già visto infatti, per es. che l'identità $H_{xyz\ldots t} = 0$ è vera quando la specie delle serie $x, y, \ldots t$ è inferiore al loro numero

(*) Per quanto riguarda l'indipendenza delle $n$ operazioni $K_1, K_2, \ldots K_n$ e la teoria completa delle operazioni di polare permutabili con ogni altra operazione di polare formata colle stesse serie si veggano le memorie:
*Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie* (Atti della R.ª Accademia delle Scienze di Napoli Vol. I, Serie 2ª - Gennaio 1888.)
*Il sistema completo delle operazioni di polare, permutabili con ogni altra operazione di polare, ecc.* (Rendiconto della R. Acc. delle Scienze di Napoli; Febbraio 1893).
*Dell'impossibilità di Sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione, ecc.* (Ibid. Giugno 1893).

$n$, nel mentre che essa non è punto vera quando la specie delle serie sia $\gtrless n$.

108. Sia $f \equiv a_x^m b_y^\mu \dots c_z^\nu$ una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, \dots, z$ (di specie qualsivoglia $\sigma$). Dette $\xi, \eta, \dots, \zeta$ altrettante serie ausiliarie, non contenute in $f$, poichè:

$$\left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \dots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f = m\mu \dots \nu \left[ \sum \pm a_\xi b_\eta \dots c_\zeta \right] a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}$$

e quindi

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \dots \mathcal{D}_{\zeta z} \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \dots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f = m\mu \dots \nu \left[ \sum \pm a_x b_y \dots c_z \right] a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}$$

si ha (art. 93):

$$H_{xy\dots z} f = m\mu \dots \nu \cdot (a_x b_y \dots c_z) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1} \qquad (1)$$

posto

$$\sum \pm a_x b_y \dots c_z \equiv (a_x b_y \dots c_z).$$

Operando ora sui due membri di (1) con $H^{(-1)}_{xy\dots z}$ e tenendo presente che si ha, analogamente alla (2), se $\alpha_x, \beta_x, \dots, \gamma_x$ sono delle forme lineari qualsivogliano e $\psi$ una funzione qualunque delle $x, y \dots, z$:

$$H^{(p)} \left\{ (\alpha_x \beta_y \dots \gamma_z) \psi \right\} = (\alpha_x \beta_y \dots \gamma_z) \left\{ H^{(p+1)} \psi \right\}, \qquad (2)'$$

se ne deduce:

$$H^{(-1)}_{xy\dots z} H_{xy\dots z} f = m\mu \dots \nu (a_x b_y \dots c_z) \cdot H_{xy\dots z} a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}.$$

Ma per la stessa (1) si ha:

$$H_{xy\dots z} a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1} = (m-1)(\mu-1) \dots (\nu-1) \cdot (a_x b_y \dots c_z) a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} \dots c_z^{\nu-2};$$

iindi si può scrivere :

$$\overset{(-1)}{{}_{y\ldots z}} H_{xy\ldots z} f = m(m-1)\mu(\mu-1)\cdots\nu(\nu-1)\cdot(a_x b_y\cdots c_z)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2}\cdots c_z^{\nu-2}.$$

i qui si deduce poi similmente :

$$\overset{(-2)}{{}_{cy\ldots z}} H^{(-1)}_{xy\ldots z} H_{xy\ldots z} f = m(m-1)(m-2)\cdots\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot(a_x b_y\cdots c_z)^3 a_x^{m-3}\cdots c_z^{\nu-3}$$

ichè si ha per la (2)':

$$H^{(-2)}\left\{(a_x b_y\cdots c_z)^2 a_x^{m-2}\cdots c_z^{\nu-2}\right\} = (a_x b_y\cdots c_z)^2\cdot H_{xy\ldots z} a_x^{m-2}\cdots c_z^{\nu-2}.$$

si procedendo si otterrà in generale :

$$_x b_y\cdots c_z)^\lambda a_x^{m-\lambda} b_y^{\mu-\lambda}\cdots c_z^{\nu-\lambda} = \frac{1}{A_\lambda} H^{(-\lambda+1)}\cdots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H f, \quad (8)$$

ve si è posto per brevità :

$$m(m-1)\cdots(m-\lambda+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\lambda+1)\cdots\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\lambda+1) = A_\lambda \quad (9)$$

9. Se la specie $\sigma$ delle serie $x, y, \ldots z$ è uguale ad $n$, si ha:

$$(a_x b_y\ldots c_z) = (a\, b\ldots c)(x\, y\ldots z),$$

sicchè (art. 88):

$$(a_x b_y\cdots c_z)^\lambda a_x^{m-\lambda} b_y^{\mu-\lambda}\cdots c_z^{\nu-\lambda} = (x y\ldots z)^\lambda\cdot\frac{1}{A^\lambda}\Omega_{xy\ldots z} f,$$

a (8) ci dà :

$$(x y\ldots z)^\lambda\cdot\Omega^\lambda f = H^{(-\lambda+1)}\cdots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H f .$$

el resto questa identità sussisterà qualunque sia la funzione $f$ su cui si operi; cioè si potrà scrivere identicamen

$$(x y\ldots z)^\lambda \Omega^\lambda_{xy\ldots z} = H^{(-\lambda+1)}\cdots H^{(-2)} H^{(-1)} H_{xy\ldots z} . \quad (10)$$

fatti, operando sull'identità del §° precedente :

$$(xy\ldots z)\Omega_{xy\ldots z} = H_{xy\ldots z} \tag{11}$$

con $H^{(-1)}_{xy\ldots z}$, se ne deduce tenendo presente la (2):

$$(xy\ldots z)\, H_{xy\ldots z}\, \Omega_{xy\ldots z} = H^{-1}_{xy\ldots z}\, H_{xy\ldots z}$$

ossia appunto per la stessa (11):

$$(xy\ldots z)^2 \Omega^2 = H^{-1}_{xy\ldots z}\, H_{xy\ldots z},$$

e così via.

## §. XX. *Esprimibilità di una forma f con n serie di variabili x, y, ..., t, come somma di una polare di $H_{xy\ldots t}$ f e di polari di forme con sole n-1 serie.*

110. Essendo $F(\overset{m}{x}, y, z, \ldots, t)$ una forma algebrica qualsivoglia colle serie di variabili $x, y, z, \ldots t$, ci proponiamo di dimostrare che:

$$(1)\quad F(\overset{m}{x}; y; z; \ldots; t) = \Delta H_{xy\ldots t} F + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \cdots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} F$$

nella quale la $\Delta$ e le $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}}$ sono certe operazioni di polare, determinate opportunamente, le quali dipendono dagli ordini $m, \ldots$ di $F$ rispetto alle singole serie di variabili. È chiaro che, essendo $m$ il grado di $F$ rispetto alla serie $x$, le forme:

$$\varphi = \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \cdots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} F \quad , \quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} = m$$

non contengono più le serie $x$; cosicchè, una volta dimostrato la (1), potremo dire (poichè $\Delta H_{xyz\ldots t} = H_{xyz\ldots t}\Delta$) che

ogni forma algebrica con n serie di variabili $x, y, \ldots, t$ si può esprimere identicamente come somma di una forma algebrica del tipo $H_{xy\ldots t} f$ e di polari di forme algebriche, che contengono soltanto n-1 serie di variabili.

111. La formola (1) si stabilisce facilmente nel caso di una forma $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y})$ con una sola serie di variabili $x, y$ di qualsivoglia specie.

Infatti, dalla definizione stessa di $H_{xy}$:

$$H_{xy} = (1 + \mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$$

segue

$$H_{xy} f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = m(\mu+1) - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} f$$

d'onde:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(\mu+1)} H_{xy} f + \frac{1}{m(\mu+1)} \mathcal{D}_{yx}\left[\mathcal{D}_{xy} f\right] \qquad (2)$$

Se ora in questa formola generale cambiamo $f$ in $\mathcal{D}_{xy} f$, essa ci dà:

$$\mathcal{D}_{xy} f = \frac{1}{(m-1)(\mu+2)} H_{xy}\left[\mathcal{D}_{xy} f\right] + \frac{1}{(m-1)(\mu+2)} \mathcal{D}_{yx}\left[\mathcal{D}_{xy}^2 f\right],$$

cosicchè, sostituendo ciò in (2) si trova:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)} \mathcal{D}_{yx}^2\left[\mathcal{D}_{xy}^2 f\right] \qquad (2)'$$

$$+ \left[\frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)} \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}\right] H_{xy} f.$$

Similmente, se nella formola generale (2) si cambia $f$ in $\mathcal{D}_{xy}^2$ e l'espressione così ottenuta per $\mathcal{D}_{xy}^2 f$ si sostituisce in (2)', si trova:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} \mathcal{D}_{yx}^{3}\left[\mathcal{D}_{xy}^{3} f\right]$$

$$+\left[\frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\mathcal{D}_{yx}^{2}\mathcal{D}_{xy}^{2}\right]H_{xy}f.$$

Così procedendo si giungerà evidentemente ad un risultato della forma:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \Delta H_{xy} f + \mathcal{D}_{yx}^{m} \cdot \mathcal{D}_{xy}^{m} f \qquad (3)$$

che è appunto un'identità della forma voluta (1). L'operazione di polare $\Delta$ è data in questo caso da:

$$\Delta = \frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{\lfloor m \cdot (\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+m)}\mathcal{D}_{yx}^{m-1}\mathcal{D}_{xy}^{m-1}, \qquad (4)$$

e l'unica operazione $\Delta_\alpha$, $(\alpha = m)$, da:

$$\Delta_m = \mathcal{D}_{yx}^{m}.$$

112 - Avendo così stabilito la (2) pel caso di due sole serie di variabili, noi procederemo ora alla dimostrazione generale della stessa formola (2) col principio della induzione matematica da $n-1$ ad $n$. Supporremo dunque che la esistenza di quella formola sia già stata dimostrata per forme con $n-1$ serie di variabili $y, z, \ldots, t$, e, basandoci su tale supposto, mostreremo come se ne deduca una formola analoga per il caso di $n$ serie $x, y, z, \ldots t$

Se nell'espressione da noi trovata per $H_{xyz\ldots t}$:

$$H_{xyz\ldots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+\mathcal{D}_{tt} & \cdots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{D}_{tz} & \cdots & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \cdots & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \cdots & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix},$$

sviluppiamo il determinante al secondo membro secondo gli elementi della sua ultima verticale, otteniamo un'espressione della forma:

$$(5) \qquad H_{xyz\ldots t} = H'_{yz\ldots t}\,\mathcal{D}_{xx} - \Delta_1\mathcal{D}_{xy} - \Delta_2\mathcal{D}_{xz} - \cdots - \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt}$$

dove $H'_{yz\ldots t}$ è la stessa operazione di polare $H^{(p)}$, definita nel §. prec., per $p=1$, e dove le $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sono operazioni di polare che si potrebbero del pari rappresentare con determinanti minori di ordine $n-1$.

Dalla identità (5) applicata ad una forma algebrica qualunque $f(\overset{\mu}{x}; y; z; \cdots; t)$, di ordine $\mu$ nella serie $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, si deduce ora:

$$(6) \qquad \mu H'_{yz\ldots t} f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots, t) = H_{xyz\ldots t} f + \Delta_1\mathcal{D}_{xy} f + \Delta_2\mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt} f.$$

Intanto, se $F(\overset{m+1}{y}; z; \ldots; t)$ è una forma qualunque composta colle $n-1$ serie $y, z, \ldots, t$ e di ordine $m+1$ nella serie $y$, esiste, per supposto, una formola analoga alla (1), del tipo:

$$(7) \qquad F(\overset{m+1}{y}; z; \ldots; t) = H_{yz\ldots t}\,\Delta F + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}=m+1} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}}\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}} F$$

in cui le $\Delta$ sono certe operazioni di polare fra le $y, z, \ldots t$. Se si.

ra noi poniamo in questa formola generale:

$$F(\overset{m+1}{y};z;\dots;t)=(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};y;z;\dots;t)$$

dove $(a_y\, b_z \cdots d_t)$ è il determinante delle forme lineari

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_\nu y_\nu$$

$$a_z \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_\nu z_\nu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che si possono formare colle $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$ e con $n-1$ serie arbitrarie, della stessa specie, di coefficienti $a$, $b, \dots, d$, otteniamo in particolare:

(8) $$(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y b_z \cdots d_t)\, f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\},$$

poichè è facile riconoscere che, per $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-2}=m+1$, si ha identicamente:

$$\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}}\left\{(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}=0.$$

Ciò posto, se

(9) $$\Delta=\psi(\mathcal{D}_{yy},\mathcal{D}_{zz},\dots,\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz}\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots)$$

sia l'espressione di $\Delta$ come aggregato razionale intero, a coefficienti costanti, delle operazioni elementari da cui dipende, e poniamo:

(9)' $$\Delta'=\psi(1+\mathcal{D}_{yy},1+\mathcal{D}_{zz},\dots,1+\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz},\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots),$$

si potrà scrivere:

(10) $$\begin{aligned}&\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}\\ &=(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot \Delta' H'_{yz\dots t}\, f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\Big\}\end{aligned}$$

poichè è facile riconoscere che, se $\mathfrak{I}(y;z;\dots;t)$ è una funzio-

qualunque delle $y, z, \ldots, t$ si ha (analogamente alla (2) del

X): $\Delta\left\{(a_y\, b_z \ldots d_t)\mathcal{D}\right\} = (a_y\, b_z \ldots d_t)\left\{\Delta'\mathcal{D}\right\}$

indi anche come caso particolare:

$$H_{yz\ldots t}\left\{(a_y\, b_z \ldots d_t)\mathcal{D}\right\} = (a_y\, b_z \ldots d_t)\left\{H'_{yz\ldots t}\mathcal{D}\right\}.$$

Tanto, sostituendo in (8), in luogo del secondo membro, la

espressione (10) si conclude:

(11) $f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) = \Delta' H'_{yz\ldots t} f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t).$

Se ora applichiamo all'identità (6) l'operazione $\Delta'$ defi-

a dalla (9)' e teniamo conto dell'identità (11), otteniamo la

mola:

$$\mu \cdot f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) =$$

$$H_{xyz\ldots t}\,\Delta' f + \Delta'\Delta_1 \mathcal{D}_{xy} f + \Delta'\Delta_2 \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta'\Delta_{n-1} \mathcal{D}_{xt} f,$$

scriveremo più compendiosamente così:

$$f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) = H_{xyz\ldots t}\,\Delta'_0 f + \Delta'_1 \mathcal{D}_{xy} f + \Delta'_2 \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta'_t \mathcal{D}_{xt} f.$$

e, se applichiamo a ciascuna delle forme $\mathcal{D}_{xy} f, \mathcal{D}_{xz} f, \cdots$ (che

o tutte di grado $\mu - 1$ nella serie $x$) lo stesso procedimento

to per la $f$, otterremo delle espressioni analoghe:

$$\mathcal{D}_{xy} f = H_{xyz\ldots t}\, Q_0 \cdot \mathcal{D}_{xy} f +$$
$$+ Q_1 \mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xy} f + Q_2 \mathcal{D}_{xz} \cdot \mathcal{D}_{xy} f + \cdots + Q_{n-1} \mathcal{D}_{xt} \cdot \mathcal{D}_{xy} f$$

$$\mathcal{D}_{xz} f = H_{xyz\ldots t}\, Q'_0 \cdot \mathcal{D}_{xz} f +$$
$$+ Q'_1 \mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xz} f + Q'_2 \mathcal{D}_{xz} \cdot \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + Q'_{n-1} \mathcal{D}_{xt} \cdot \mathcal{D}_{xz} f$$

. . . . . .

ndo sempre le $Q$ certe operazioni di polare fra le $x, y, \ldots, z$;

le quali espressioni sostituite nelle (12)' ci daranno un risultato della forma:

$$f=(x\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta''_0 f$$
$$+\Delta''_{11}\mathcal{D}^2_{xy}f+\Delta''_{22}\mathcal{D}^2_{xz}f+\dots+\Delta''_{n-1,n-1}\mathcal{D}^2_{xt}f$$
$$+\Delta''_{12}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta''_{1,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xt}f$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Procedendo allo stesso modo, cioè applicando a ciascuna delle forme $\mathcal{D}^2_{xy}f$, $\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f,\dots$ (che sono tutte del grado $\mu-2$ nella serie $x$) la relazione del tipo (12)', otterremo similmente

$$f(x\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta'''_0 f+$$
$$+\Delta'''_{111}\mathcal{D}^3_{xy}f+\Delta'''_{112}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta'''_{1,2,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xt}f$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e così di seguito, finchè si giungerà ad un risultato della forma:

$$f(x^{\mu}\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta^{(\mu)}_0 f+\Delta^{(\mu)}_{11\dots1}\mathcal{D}^{\mu}_{xy}f+$$
$$+\Delta^{(\mu)}_{1\dots1,2\dots2,\dots,(n-1)\dots(n-1)}\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\cdots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt}f+\dots$$

essendo in ogni termine $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=\mu$; e questo risultato è appunto la relazione (1) stabilita per le $n$ serie $x,y,z,\dots t$.

115 La formola (1) resta così dimostrata e si vede appunto, come si era enunciato, che le operazioni di polare che figurano nella (1) non dipendono affatto dai coefficienti di $F(x,y,z,\dots t)$, ma solo dai gradi di $F$ rispetto alle serie $x,y,z,\dots,t$. Infatti, se si ammette ciò per lo sviluppo (7) con $n-1$ serie $y,z,\dots t$, il

procedimento da noi tenuto ci mostra chiaramente che questa stessa proprietà ha luogo anche per gli sviluppi relativi alle $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$.

## §. XXI. *Applicazione della teoria precedente al caso di forme con tre serie di variabili.*

116. A maggiore schiarimento, ed anche per mostrare come il procedimento di dimostrazione del §. prec. dia anche il modo di calcolare effettivamente le operazioni di polare $\Delta$ che figurano nello sviluppo ivi dato, applicheremo la teoria ora esposta al caso di tre serie di variabili $n^{arie}$:

$$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_n$$

$$z \equiv z_1, z_2, \ldots, z_n \; .$$

Per questo caso si ha:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{xx} H'_{yz} - \Delta_1 \mathcal{D}_{xy} - \Delta_2 \mathcal{D}_{xz},$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz} = (1+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}$$

$$H'_{yz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}$$

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} \mathcal{D}_{yx}^{3}\left[\mathcal{D}_{xy}^{3} f\right]$$

$$+\left[\frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\mathcal{D}_{yx}^{2}\mathcal{D}_{xy}^{2}\right]H_{xy}f.$$

Così procedendo si giungerà evidentemente ad un risultato della forma:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \Delta H_{xy} f + \mathcal{D}_{yx}^{m} \cdot \mathcal{D}_{xy}^{m} f \qquad (3)$$

che è appunto un'identità della forma voluta (1). L'operazione di polare $\Delta$ è data in questo caso da:

$$\Delta = \frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{\underline{|m} \cdot (\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+m)}\mathcal{D}_{yx}^{m-1}\mathcal{D}_{xy}^{m-1}, \qquad (4)$$

e l'unica operazione $\Delta_\alpha$, $(\alpha = m)$, da:

$$\Delta_m = \mathcal{D}_{yx}^{m}.$$

112 - Avendo così stabilito la (2) pel caso di due sole serie di variabili, noi procederemo ora alla dimostrazione generale della stessa formola (2) col principio della induzione matematica da $n-1$ ad $n$. Supporremo dunque che la esistenza di quella formola sia già stata dimostrata per forme con $n-1$ serie di variabili $y, z, \ldots, t$, e, basandoci su tale supposto, mostreremo come se ne deduca una formola analoga per il caso di $n$ serie $x, y, z, \ldots t$

Se nell'espressione da noi trovata per $H_{xyz\ldots t}$:

$$H_{xyz\ldots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+\mathcal{D}_{tt} & \cdots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{D}_{tz} & \cdots & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \cdots & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \cdots & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix},$$

sviluppiamo il determinante del secondo membro secondo gli elementi della sua ultima verticale, otteniamo un'espressione della forma:

$$(5) \qquad H_{xyz\ldots t} = H'_{yz\ldots t}\,\mathcal{D}_{xx} - \Delta_1\mathcal{D}_{xy} - \Delta_2\mathcal{D}_{xz} - \cdots - \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt}$$

dove $H'_{yz\ldots t}$ è la stessa operazione di polare $H^{(p)}$, definita nel §. prec., per $p=1$, e dove le $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sono operazioni di polare che si potrebbero del pari rappresentare con determinanti minori di ordine $n-1$.

Dalla identità (5) applicata ad una forma algebrica qualunque $f(\overset{\mu}{x}; y; z; \cdots; t)$, di ordine $\mu$ nella serie $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, si deduce ora:

$$(6) \qquad \mu H'_{yz\ldots t} f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots, t) = H_{xyz\ldots t} f + \Delta_1\mathcal{D}_{xy} f + \Delta_2\mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt} f.$$

Intanto, se $F(\overset{m+1}{y}; z; \ldots; t)$ è una forma qualunque composta colle $n-1$ serie $y, z, \ldots, t$ e di ordine $m+1$ nella serie $y$, esiste, per supposto, una formola analoga alla (1), del tipo:

$$(7) \qquad F(\overset{m+1}{y}; z; \ldots; t) = H_{yz\ldots t}\,\Delta F + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}=m+1} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}}\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}} F$$

in cui le $\Delta$ sono certe operazioni di polare fra le $y, z, \ldots t$. Se si.

ra noi poniamo in questa formola generale:

$$F(\overset{m+1}{y};z;\dots;t)=(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};y;z;\dots;t)$$

dove $(a_y\, b_z \cdots d_t)$ è il determinante delle forme lineari

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_\nu y_\nu$$

$$a_z \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_\nu z_\nu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che si possono formare colle $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$ e con $n-1$ serie arbitrarie, della stessa specie, di coefficienti $a$, $b, \dots, d$, otteniamo in particolare:

(8) $$(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \cdots d_t)\, f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\},$$

poichè è facile riconoscere che, per $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-2}=m+1$, si ha identicamente:

$$\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}}\left\{(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}=0.$$

Ciò posto, se

(9) $$\Delta=\psi(\mathcal{D}_{yy},\mathcal{D}_{zz},\dots,\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz}\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots)$$

sia l'espressione di $\Delta$ come aggregato razionale intero, a coefficienti costanti, delle operazioni elementari da cui dipende, e poniamo:

(9)' $$\Delta'=\psi(1+\mathcal{D}_{yy},1+\mathcal{D}_{zz},\dots,1+\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz},\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots),$$

si potrà scrivere:

(10) $$\begin{aligned}&\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}\\ &=(a_y\, b_z \cdots d_t)\cdot\Delta' H'_{yz\dots t}\, f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\Big\}\end{aligned}$$

poichè è facile riconoscere che, se $\vartheta(y;z;\dots;t)$ è una funzio-

.ne qualunque delle $y, z, \ldots, t$ si ha (analogamente alla (2) del §.XIX): $\Delta\left\{(a_y\, b_z \ldots d_t)\mathcal{D}\right\} = (a_y\, b_z \ldots d_t)\left\{\Delta'\mathcal{D}\right\}$

e quindi anche come caso particolare:

$$H_{yz\ldots t}\left\{(a_y\, b_z \ldots d_t)\mathcal{D}\right\} = (a_y\, b_z \ldots d_t)\left\{H'_{yz\ldots t}\mathcal{D}\right\}.$$

Pertanto, sostituendo in (8), in luogo del secondo membro, la sua espressione (10) si conclude:

$$(11) \qquad f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) = \Delta' H'_{yz\ldots t} f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t).$$

114 - Se ora applichiamo all'identità (6) l'operazione $\Delta'$ definita dalla (9)' e teniamo conto dell'identità (11), otteniamo la formola:

$$\mu \cdot f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) =$$

$$(12) \qquad = H_{xyz\ldots t}\, \Delta' f + \Delta'\Delta_1 \mathcal{D}_{xy} f + \Delta'\Delta_2 \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta'\Delta_{n-1} \mathcal{D}_{xt} f,$$

che scriveremo più compendiosamente così:

$$(12)' \quad f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; z; \ldots; t) = H_{xyz\ldots t}\, \Delta'_0 f + \Delta'_1 \mathcal{D}_{xy} f + \Delta'_2 \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + \Delta'_t \mathcal{D}_{xt} f.$$

Ma, se applichiamo a ciascuna delle forme $\mathcal{D}_{xy} f$, $\mathcal{D}_{xz} f, \cdots$ (che sono tutte di grado $\mu - 1$ nella serie $x$) lo stesso procedimento tenuto per la $f$, otterremo delle espressioni analoghe:

$$\mathcal{D}_{xy} f = H_{xyz\ldots t}\, Q_0 \cdot \mathcal{D}_{xy} f +$$
$$+ Q_1 \mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xy} f + Q_2 \mathcal{D}_{xz} \cdot \mathcal{D}_{xy} f + \cdots + Q_{n-1} \mathcal{D}_{xt} \cdot \mathcal{D}_{xy} f$$

$$\mathcal{D}_{xz} f = H_{xyz\ldots t}\, Q'_0 \cdot \mathcal{D}_{xz} f +$$
$$+ Q'_1 \mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xz} f + Q'_2 \mathcal{D}_{xz} \cdot \mathcal{D}_{xz} f + \cdots + Q'_{n-1} \mathcal{D}_{xt} \cdot \mathcal{D}_{xz} f$$

. . . . . .

essendo sempre le $Q$ certe operazioni di polare fra le $x, y, \ldots, z$;

le quali espressioni sostituite nelle (12)' ci daranno un risultato della forma:

$$f=(x\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta''_0 f$$
$$+\Delta''_{11}\mathcal{D}^2_{xy}f+\Delta''_{22}\mathcal{D}^2_{xz}f+\dots+\Delta''_{n-1,n-1}\mathcal{D}^2_{xt}f$$
$$+\Delta''_{12}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta''_{1,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xt}f$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Procedendo allo stesso modo, cioè applicando a ciascuna delle forme $\mathcal{D}^2_{xy}f$, $\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f,\dots$ (che sono tutte del grado $\mu-2$ nella serie $x$) la relazione del tipo (12)', otterremo similmente

$$f(x\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta'''_0 f+$$
$$+\Delta'''_{111}\mathcal{D}^3_{xy}f+\Delta'''_{112}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta'''_{1,2,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xt}f$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e così di seguito, finchè si giungerà ad un risultato della forma:

$$f(x^{\mu}\,;y\,;z\,;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta^{(\mu)}_0 f+\Delta^{(\mu)}_{11\dots1}\mathcal{D}^{\mu}_{xy}f+$$
$$+\Delta^{(\mu)}_{1\dots1,2\dots2,\dots,(n-1)\dots(n-1)}\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\dots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt}f+\dots$$

essendo in ogni termine $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=\mu$; e questo risultato è appunto la relazione (1) stabilita per le $n$ serie $x,y,z,\dots t$.

115 La formola (1) resta così dimostrata e si vede appunto, come si era enunciato, che le operazioni di polare che figurano nella (1) non dipendono affatto dai coefficienti di $F(x,y,z,\dots t)$, ma solo dai gradi di $F$ rispetto alle serie $x,y,z,\dots,t$. Infatti, se si ammette ciò per lo sviluppo (7) con $n-1$ serie $y,z,\dots t$, il

procedimento da noi tenuto ci mostra chiaramente che questa stessa proprietà ha luogo anche per gli sviluppi relativi alle $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$.

## §. XXI. *Applicazione della teoria precedente al caso di forme con tre serie di variabili.*

116. A maggiore schiarimento, ed anche per mostrare come il procedimento di dimostrazione del §. prec. dia anche il modo di calcolare effettivamente le operazioni di polare $\Delta$ che figurano nello sviluppo ivi dato, applicheremo la teoria ora esposta al caso di tre serie di variabili $n^{\text{arie}}$:

$$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_n$$

$$z \equiv z_1, z_2, \ldots, z_n \; .$$

Per questo caso si ha:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{xx} H'_{yz} - \Delta_1 \mathcal{D}_{xy} - \Delta_2 \mathcal{D}_{xz},$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz} = (1+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}$$

$$H'_{yz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}$$

cosicchè la formola (12) del §. precedente diviene:

$$\text{(a)} \qquad \mu \cdot f(\overset{\mu}{x}; \overset{m}{y}; \overset{m'}{z}) = H_{xyz}\Delta' f + \Delta'\Delta_1 \cdot \mathcal{D}_{xy} f + \Delta'\Delta_2 \cdot \mathcal{D}_{xz} f$$

dove $\Delta'$ è un'operazione di polare fra le $y$, $z$, che deve dare identicamente:

$$\text{(b)} \qquad \varphi(\overset{m}{y}; \overset{m'}{z}) = \Delta' \cdot H'_{yz}\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) .$$

117 - Per calcolare l'espressione effettiva di $\Delta'$, si ricorrerà, secondo la teoria esposta, alla formola fondamentale (1) del §. precedente relativa a due sole serie di variabili. Questa formola da noi già calcolata (art. 111) è la seguente:

$$f(\overset{\mu}{y}; \overset{\lambda}{z}) = \left\{ \frac{1}{\mu(\lambda+1)} + \frac{\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}}{\mu(\mu-1)(\lambda+1)(\lambda+2)} + \right.$$

$$+ \frac{\mathcal{D}_{zy}^2 \mathcal{D}_{yz}^2}{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. + \frac{\mathcal{D}_{zy}^{\mu-1} \mathcal{D}_{yz}^{\mu-1}}{\underline{|\mu} \cdot (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+\mu)} \right\} H_{yz} f$$

$$+ \frac{\mathcal{D}_{zy}^{\mu} \mathcal{D}_{yz}^{\mu} f}{\underline{|\mu} \cdot (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+\mu)}$$

Ponendo ora in questa formola:

$$f(\overset{\mu}{y}; \overset{\lambda}{z}) = (a_y\, b_z)\, \varphi(\overset{m}{y}; \overset{m'}{z})$$

se ne deduce, dividendo ambo i membri per $(a_y\, b_z)$:

$$\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z}) = \left\{ \frac{1}{(m+1)(m'+2)} + \frac{\mathcal{D}_{zy}\,\mathcal{D}_{yz}}{(m+1)m\cdot(m'+2)(m'+3)} + \cdots \right.$$

(d)
$$\left. + \frac{\mathcal{D}_{zy}^{m}\,\mathcal{D}_{yz}^{m}}{\lfloor m+1\,(m'+2)(m'+3)\cdots(m'+m+2)} \right\} H'_{yz}\,\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z}).$$

L'operazione $\Delta'$, che soddisfa alla (b) e deve sostituirsi in (a), è data dunque da:

(e)
$$\Delta' = \frac{\lfloor m'+1}{\lfloor m+1} \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\lfloor m-i}{\lfloor m'+2+i}\, \mathcal{D}_{zy}^{i}\,\mathcal{D}_{yz}^{i}.$$

118. - Le operazioni di polare nel secondo membro delle (a) sono così tutte determinate completamente. Innanzi di procedere scriveremo la (a) più brevemente così:

(a)' $$\mu f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z}) = H_{xyz}\,\mathcal{T}_{m,m'}\,f + \mathcal{T}'_{m,m'}\,\mathcal{D}_{xy}\,f + \mathcal{T}''_{m,m'}\,\mathcal{D}_{xz}\,f$$

con che si metta meglio in evidenza che le operazioni di polare $\mathcal{T}_{m,m'}$, $\mathcal{T}'_{m,m'}$, $\mathcal{T}''_{m,m'}$ dipendono soltanto dai gradi $m$ ed $m'$, cioè sono indipendenti da $\mu$ e dai coefficienti di $f$.

Ponendo ora in questa formola, in luogo di $f$, la $\mathcal{D}_{xy}f$, ovvero la $\mathcal{D}_{xz}f$, se ne deduce:

$$(\mu-1)\cdot\mathcal{D}_{xy}f = H_{xyz}\,\mathcal{T}_{m+1,m'}\,\mathcal{D}_{xy}f + \\ + \mathcal{T}'_{m+1,m'}\,\mathcal{D}_{xy}^{2}f + \mathcal{T}''_{m+1,m'}\,\mathcal{D}_{xz}\,\mathcal{D}_{xy}f$$

e:

$$(\mu-1)\cdot\mathcal{D}_{xz}f = H_{xyz}\,\mathcal{T}_{m,m'+1}\,\mathcal{D}_{xz}f + \\ + \mathcal{T}'_{m,m'+1}\,\mathcal{D}_{xy}\,\mathcal{D}_{xz}f + \mathcal{T}''_{m,m'+1}\,\mathcal{D}_{xz}^{2}f.$$

Sostituendo queste espressioni in (a)', questa ci dà:

$$\mu(\mu-1)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=$$

$$=H_{xyz}\Big\{(\mu-1)\mathcal{T}_{m,m'}+\mathcal{T}'_{m,m'}\mathcal{T}_{m+1,m'}\mathcal{D}_{xy}+\mathcal{T}''_{m,m'}\mathcal{T}_{m,m'+1}\mathcal{D}_{xz}\Big\}f$$

$$+\mathcal{T}'_{m,m'}\mathcal{T}'_{m+1,m'}\mathcal{D}^2_{xy}f+\mathcal{T}''_{m,m'}\mathcal{T}''_{m,m'+1}\mathcal{D}^2_{xz}f$$

$$+(\mathcal{T}'_{m,m'}\mathcal{T}''_{m+1,m}+\mathcal{T}''_{m,m'}\mathcal{T}'_{m,m'+1})\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f.$$

Si sostituiranno ora in questa formola, in luogo di $\mathcal{D}^2_{xy}f$, $\mathcal{D}^2_{xz}f$, $\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f$, le loro espressioni secondo la (a)', cioè:

$$(\mu-2)\cdot\mathcal{D}^2_{xy}f=H_{xyz}\mathcal{T}_{m+2,m'}\mathcal{D}^2_{xy}f+\mathcal{T}'_{m+2,m'}\mathcal{D}^3_{xy}f+\mathcal{T}''_{m+2,m'}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{xz}f$$

ecc.

Così procedendo si giungerà alla formola finale:

$$\underline{|\mu}\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=H_{xyz}\Delta f+\sum_{\alpha+\beta=\mu}\Delta_{\alpha\beta}\mathcal{D}^{\alpha}_{xy}\mathcal{D}^{\beta}_{xz}f$$

ottenendo per le $\Delta$ delle espressioni composte con legge semplice per mezzo delle $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ affette da diversi indici.

---

## §. XXII. *Sviluppo di una forma algebrica con n serie di variabili secondo le polari di forme con sole n-1 serie.*

19. Sia $f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\overset{\nu}{z};\dots;\overset{\rho}{t})$ una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie qualsivoglia $\sigma$. Possiamo rappresentarla simbolicamente (§. VIII) con:

$$f\equiv \overset{m}{a}_x\,\overset{\mu}{b}_y\,\overset{\nu}{c}_z\cdots\overset{\rho}{e}_t \qquad (1)$$

Poichè (art. 108):

$$H_{xyz\ldots t} f = m\mu\nu\ldots\rho\cdot(a_x b_y c_z \cdots e_t) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \ldots e_t^{\rho-1}, \quad (2)$$

e

$$\mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2} \ldots \mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}} f = \underline{|m} \cdot a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \ldots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu} \ldots e_t^{\rho}, \quad (3)$$

se poniamo per brevità:

$$(3)' \quad a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \ldots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu} \ldots e_t^{\rho} = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = m$$

La formola (1) del §. XX ci dà un'identità della forma:

$$(4) \quad f = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} + \Delta \cdot \left\{ (a_x b_y c_z \ldots e_t) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \ldots e_t^{\rho-1} \right\}$$

dove le $\Delta$ sono certe operazioni di polare fra le serie $x, y, z, \ldots t$, operazioni, che, evidentemente, possiamo ritenere formate colle sole operazioni elementari proprie $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{yz}, \ldots$; giacchè il risultato di un'operazione impropria $\mathcal{D}_{pp}$ si può sempre surrogare col moltiplicare per un coefficiente numerico eguale al grado, nella serie $p$, della forma su cui si opera

120. Ciò posto, applicando l'identità della forma (4), anzichè al composto simbolico (1) rappresentante la $f$, al composto simbolico

$$a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \ldots e_t^{\rho-1},$$

si avrà un'identità consimile:

$$a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \ldots e_t^{\rho-1} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m-1} \Delta'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \left\{ a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \ldots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu} \ldots e_t^{\rho} \right\}$$

$$+ \nabla \left\{ (a_x b_y c_z \ldots e_t) a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \ldots e_t^{\rho-2} \right\}$$

dalla quale, moltiplicando entrambi i membri per $(a_x b_y c_z \cdots e_t)$ e ponendo per brevità:

$$(a_x b_y c_z \cdots e_t) a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \cdots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu} \cdots d_t^{\rho} = \varphi'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}} \quad , \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m-1$$

e

$$\Delta \nabla = \Delta' ,$$

si deduce:

$$(a_x b_y c_z \cdots e_t) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \cdots e_t^{\rho-1} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m-1} \Delta'_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}$$

$$+ \Delta' \left\{ (a_x b_y c_z \cdots e_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \cdots e_t^{\rho-2} \right\} ,$$

cosicchè, sostituendo ciò in (4), si ottiene per $f$ la seguente espressione:

$$f = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} \varphi_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m-1} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}$$

(5)

$$+ \Delta' \left\{ (a_x b_y c_z \cdots d_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \cdots e_t^{\rho-2} \right\} .$$

Si procederà ora allo stesso modo applicando l'identità della forma (4) al composto simbolico

$$a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \cdots e_t^{\rho-2}$$

e moltiplicando poi i due membri dell'identità ottenuta per $(a_x b_y c_z \cdots e_t)^2$. Si otterrà così un risultato della forma:

$$(a_x b_y c_z \cdots e_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \cdots e_t^{\rho-2} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = m-2} \Delta''_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} \varphi''_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}}$$

$$+ \Delta'' \left\{ (a_x b_y c_z \cdots e_t)^3 a_x^{m-3} b_y^{\mu-3} c_z^{\nu-3} \cdots e_t^{\rho-3} \right\} ,$$

che si sostituirà in (5), cosicchè si avrà per $f$ l'espressione:

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} +$$

$$(5) \qquad + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-2} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi''_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} + \Delta'' \left\{ (a_x b_y c_z \dots e_t)^3 a_x^{m-3} b_y^{\mu-3} c_z^{\nu-3} \dots e_t^{\rho-3} \right\}.$$

Così seguitando si giungerà evidentemente ad ottenere per $f$ un'espressione della forma:

$$f(x^m; y^\mu; z^\nu; \dots; t^\rho) = \sum_{i+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \qquad (7)$$

dove:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} = (a_x b_y c_z \dots e_t)^i a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \dots a_t^{\alpha_{p-1}} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i} \dots e_t^{\rho-i}. \qquad (8)$$

121. La forma $\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ è evidentemente un covariante (di peso nullo) della forma fondamentale $f$, poichè essa è espressa da un aggregato di elementi lineari simbolici $a_x, a_y, b_x, \dots$ e per conseguenza è una polare di $f$, (cfr. art. 48 e 53).

Del resto le cose dette al §. XIX circa le operazioni $H$ ed $H^{(p)}$ ci dànno immediatamente l'operazione di polare mercè la quale dalla $f$ si deduce una qualunque delle $\varphi$. Si ha, cioè, secondo l'art. 108:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)^i a_x^{m-i} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i} \dots e_t^{\rho-i} =$$

$$= \frac{1}{A_i} H^{(-i+1)}_{xyz\dots t} \dots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H_{xyz\dots t} f, \qquad (9)$$

essendo il coefficiente numerico $A_i$ dato da:

$$A_i = m(m-i)\cdots(m-i+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)\cdots\rho(\rho-1)\cdots(\rho-i+1) \quad (10)$$

cosicchè sarà per la (8):

$$(8)' \quad \varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} = \frac{1}{A_i\,\underline{|m-i}}\,\mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1}\mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2}\cdots\mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}}H^{(-i+1)}\cdots H^{(-2)}H^{(-1)}Hf.$$

122. A meglio valutare l'importanza dello sviluppo (7), è opportuno di esaminarlo separatamente nei tre casi che si possono presentare, secondochè la specie $\sigma$ delle $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ sia minore di $n$, eguale ad $n$, ovvero maggiore di $n$. Cominciamo dal primo.

Se la specie $\sigma$ è minore di $n$, l'operazione $H_{xyz\ldots t}$ applicata a qualsiasi funzione delle $x, y, z, \ldots, t$ dà (art. 10) un risultato nullo identicamente, cosicchè la (8)' ci dice essere identicamente:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} = 0 \quad , \qquad \text{per } i > 0 \ .$$

Ciò appare del resto anche dal fatto che, per $\sigma < n$, è identicamente (cfr. §. VII):

$$(a_x\, b_y\, c_z \cdots e_t) = 0 \,,$$

dignisachè la (8) ci dà:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} = 0 \quad , \qquad \text{per } i > 0$$

e:

$$\varphi^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} = \varphi^{\,3}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} = a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2}\cdots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu}\cdots e_t^{\rho}$$

$$= \frac{1}{\underline{|m}}\,\mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1}\mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2}\cdots\mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}} f \,.$$

Lo sviluppo (7) si riduce pertanto al seguente:

$$f(\overset{m}{x};y;z;\dots;t)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m}\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \tag{11}$$

in cui le $\varphi$ non contengono affatto la serie $x$. Dunque: *una forma algebrica $f$ con $n$ serie di variabili, di specie inferiore ad $n$, si può sempre esprimere come la somma di polari di forme $\varphi$ con sole $n-1$ serie di variabili (e queste forme $\varphi$ sono poi esse stesse polari della $f$).*

123. Supponiamo ora che la specie $\sigma$ sia eguale ad $n$. In tal caso è identicamente (cfr. §. 7):

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)=(abc\dots e)(xyz\dots t),$$

cosicchè allo sviluppo (7) si può anche dare la forma:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\overset{\nu}{z};\dots;\overset{\rho}{t})=\sum_{i+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m}(xyz\dots t)^i\cdot\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}\mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \tag{12}$$

dove:

$$\mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}=(abc\dots e)^i a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2}\dots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i}\dots c_t^{\rho-i} \tag{13}$$

o anche:

$$\mathcal{E}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}=\frac{1}{A_i\,\underline{|m-i}}\mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1}\mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2}\dots\mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}}\Omega^i_{xyz\dots t}f \tag{14}$$

avendo il numero $A_i$ lo stesso significato dato all'art. 122, poichè si ha:

$$(abc\dots e)^i a_x^{m-i} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i}\dots e_t^{\rho-i}=\frac{1}{A_i}\Omega^i f. \tag{15}$$

Le $\mathcal{E}$ sono, come è facile riconoscere (cfr. art. 86) dei co-

varianti della forma fondamentale $f$ (che si chiameranno co-varianti elementari).

Vediamo dunque che: *una forma algebrica $f$ con $n$ serie di variabili $n^{ria}$ si può sviluppare in una somma di termini che procedono secondo le potenze del determinante delle variabili, ogni potenza di tale determinante venendo moltiplicata per una somma di polari di forme $\mathcal{E}$ che contengono soltanto $n-1$ delle serie di variabili. Le forme $\mathcal{E}$ sono covarianti di $f$, che si possono dedurre da $f$ mediante l'operazione $\Omega$ e mediante operazioni di polare.*

124- Finalmente il caso di $\sigma > n$ dà luogo ad uno sviluppo analogo allo sviluppo (12), colla differenza che in luogo della potenza $i^{esima}$ di un unico determinante, si potrà avere uno qualunque dei prodotti di $i$ determinanti del tipo:

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \cdot & \cdot & x_k \\ y_\nu & y_h & \cdot & \cdot & y_k \\ z_\nu & z_h & \cdot & \cdot & z_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_\nu & t_h & \cdot & \cdot & t_k \end{vmatrix} , \qquad \nu, h, \ldots k = 1, 2, 3, \ldots, \sigma .$$

Si ha, infatti, in questo caso:

$$(a_x\, b_y\, c_z \cdots e_t) = \sum_{\nu,h,\dots,k} \left\{ \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \dots & x_k \\ y_\nu & y_h & \dots & y_k \\ z_\nu & z_h & \dots & z_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ t_\nu & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \dots & a_k \\ b_\nu & b_h & \dots & b_k \\ c_\nu & c_h & \dots & c_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ e_\nu & e_h & \dots & e_k \end{vmatrix} \right\}$$

sicchè, se indichiamo con $\Pi_i$ uno qualunque dei prodotti di $i$ determinanti del tipo (16) e con $Q_i$ il prodotto dei corrispondenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \dots & a_k \\ b_\nu & b_h & \dots & b_k \\ c_\nu & c_h & \dots & c_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ e_\nu & e_h & \dots & e_k \end{vmatrix},$$

la potenza $i^{esima}$ del determinante $(a_x\, b_y\, c_z \cdots e_t)$ si esprimerà come una somma di parti del tipo

$$\Pi_i \cdot Q_i ,$$

onde si vede dalle (7) ed (8) che $f$ si potrà esprimere come somma di termini del tipo

$$\Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \left\{ Q_i\, a_y^{\alpha_1}\, a_z^{\alpha_2} \dots a_t^{\alpha_{n-1}}\, b_y^{\mu-i}\, c_z^{\nu-i} \cdots e_t^{\rho-i} \right\}$$

$$= \Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\, \mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}$$

dove, come è chiaro, le $\mathcal{E}$ sono anche qui delle forme che contengono soltanto le $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$.

125 - Per $n = 2$ lo sviluppo (12) ha la forma semplicissima:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv \overset{m}{a}_x \overset{\mu}{b}_y = \sum_i (xy)^i \cdot \Delta_i \mathcal{E}^{(i)} \quad , \qquad \mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i a_y^{m-i} b_y^{\mu-i}$$

dove l'operazione di polare $\Delta_i$, potendosi sempre ritenere (cfr. art. 118) della forma $\sum_h A\, \mathcal{D}_{yx}^k \mathcal{D}_{xy}^h$, in cui le $A$ sono coefficienti costanti, non può essere, a meno di un coefficiente numerico, che $\mathcal{D}_{xy}^{m-i}$. Possiamo quindi anche scrivere:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv \overset{m}{a}_x \overset{\mu}{b}_y = \sum_i \alpha_i \cdot (xy)^i \cdot \mathcal{D}_{yx}^{m-i} \mathcal{E}^{(i)} \tag{16}$$

dove le $\alpha_i$ sono dei coefficienti numerici ed

$$\mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i a_y^{m-i} b_y^{\mu-i} = \frac{1}{\underline{|m-i}\ \mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)} \mathcal{D}_{xy}^{m-i} \Omega_{xy}^i f \, .$$

La determinazione dei valori dei coefficienti numerici $\alpha$ verrà da noi fatta nel capitolo sulle forme binarie *

---

(*) Lo sviluppo (16) è conosciuto sotto il nome di sviluppo di Clebsch e Gordan. Esso si può considerare come il fondamento del trattato classico di Clebsch: *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872).

Questo sviluppo è stato esteso dapprima al solo campo ternario (Capelli: *sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili*, nel Giornale di Battaglini vol. XVIII, 1880). Lo sviluppo più generale è stato poi dato, con altrettante dimostrazioni differenti, nelle seguenti memorie:

*Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (l.c. 1882). Cfr. anche: *Sur les opérations dans la théorie générale des formes alg.* (Mathem. Annalen Bd. XXVII) — *Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1891) — *Nuova dimostraz. del teorema sullo sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1892) — Quest'ultima è appunto la dimostraz. da noi qui riportata. Un'altra dimostrazione dello sviluppo per polari è stata data da J. Deruyts (Cfr. *Essai d'une théorie générale des formes algebriques*; Bruxelles, 1891).

## §.XXIII *Corollarii dello sviluppo stabilito nel precedente §.*

**125**- Sia $f(x;y;z;\dots t)$ una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie $\sigma$; e supponiamo $n > \sigma - 1$. Se $n > \sigma$, applicando più volte di seguito il primo caso (art. 122) dello sviluppo per polari stabilito nel §. prec., la forma $f$ si rappresenterà dapprima come somma di polari di forme con sole $n-1$ serie; queste poi alla lor volta come polari di forme con sole $n-2$ serie e così di seguito, finchè si giungerà evidentemente ad una espressione, che rappresenterà la $f$ come una somma di polari di forme $\varphi$ con sole $\sigma$ serie di variabili (e queste forme $\varphi$ saranno esse stesse delle polari di $f$). A questo punto si applicherà alle $\varphi$ il secondo caso (art. 123) nello sviluppo per polari, ottenendosi dalle espressioni della forma:

$$\varphi \equiv \varphi(\xi;\eta;\dots;t) = \sum (\xi\,\eta\dots t)^i \Delta_{\xi\eta\dots t}\, \psi(\eta;\xi;\dots t)$$

essendo $\xi, \eta, \dots t$ le ultime $\sigma$ delle serie $x, y, z, \dots t$ e $\Delta_{\xi\eta\dots t}$ delle operazioni di polari fra queste $\sigma$ serie $\xi, \eta, \dots, t$. Se dunque si sostituiscono queste espressioni delle $\varphi$ nella espressione precedentemente trovata per $f$:

$$f(x;y;z;\dots;t) = \sum \Delta_{xyz\dots t}\, \varphi(\xi;\eta;\dots;t)$$

e si considera per es. che:

$$\mathcal{D}_{\xi x}(\xi\,\eta\dots t) = (x\,\eta\dots t)$$

ecc., è chiaro che si potrà anche scrivere:

$$f(x;y;z;\dots;t)=\sum(\dots y\dots z\dots)^i\,\Delta_{xyz\dots t}\,\psi(\eta;\zeta;\dots;t)$$

dove $(\dots y\dots z\dots)$ può essere uno qualunque dei determinanti di ordine $\sigma$ che si possono formare con $\sigma$ serie scelte a piacere fra le $x, y, z, \dots, t$.

Se ci arrestiamo a questo punto della riduzione successiva data dallo sviluppo del §. prec. concludiamo intanto che *una forma algebrica $f$ con un numero comunque grande di serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie $\sigma$ si può sempre esprimere come un aggregato razionale intero di covarianti identici, formati colle serie $x, y, z, \dots, t$ e di polari di forme algebriche $\psi$, che contengono soltanto $\sigma-1$ serie di variabili. Queste forme $\psi$ sono poi esse stesse delle polari di $f$.*

Questo teorema ci permetterà evidentemente di limitare lo studio dei covarianti di un sistema di forme fondamentali $n^{arie}$ al caso in cui le forme fondamentali contengano al più $n-1$ serie di variabili. Così, ad esempio, nel campo binario si considereranno ordinariamente soltanto forme fondamentali e covarianti di forme fondamentali, che contengono un'unica serie di variabili. Nel campo ternario si studiano invece forme e covarianti di forme con una o due serie di variabili; e così via.

127. Nulla però c'impedisce di proseguire anche più oltre nell'applicazione dello sviluppo anche a forme alge-

briche di specie $\sigma$ che contenga soltanto $\sigma-1$ serie di variabili, al più. Applicando ad una forma $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots, t)$ contenente soltanto $\sigma-1$ serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$ di specie $\sigma$ il caso terzo (art. 123) dello sviluppo del §. prec., si otterrà dapprima per $\psi$ un'espressione della forma:

$$\psi(\xi\,;\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Delta_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)$$

dove $\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\ldots t}$ esprime un prodotto di determinanti di ordine $\sigma-1$ del tipo:

$$\begin{vmatrix} \xi_r & \xi_k & \cdots & \xi_h \\ \eta_r & \eta_k & \cdots & \eta_h \\ \zeta_r & \zeta_k & \cdots & \zeta_h \\ \vdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ t_r & t_k & \cdots & t_h \end{vmatrix} \qquad , \; r, k, \ldots, h = 1, 2, \ldots, \sigma$$

Applicando poi di nuovo lo stesso procedimento ad ogni forma $\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)$ si otterrà per ognuna di esse un'espressione della forma analoga:

$$\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\Delta_{\eta\zeta\ldots t}\,\vartheta(\zeta\,;\ldots;t)$$

cosicchè, sostituendo quest'ultime espressioni nella precedente, si potrà scrivere:

$$\psi(\xi\,;\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \nabla_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\vartheta(\zeta;\ldots;t)$$

dove $\nabla_{\xi\eta\zeta\ldots t}$ esprime un'operazione di polare fra le $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$. Così procedendo si finirà evidentemente per concludere che una forma algebrica $\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ con $\sigma-1$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, t$ di specie $\sigma$ si può esprimere come somma di polari di forme del tipo:

$$\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-3)}_{\zeta\ldots t}\cdots\Pi^{(1)}_{t}. \tag{1}$$

In altri termini:

$$\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)=\sum\Delta_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t) \tag{2}$$

dove le forme $\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ contengono le $\sigma(\sigma-1)$ variabili delle $\sigma-1$ serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$ soltanto in certe combinazioni speciali. E precisamente le $\chi$ sono aggregati di determinanti minori dei vari ordini $1, 2, \ldots, \sigma-1$ appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_\sigma \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_\sigma \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_\sigma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_\sigma \end{matrix} \tag{3}$$

colla restrizione che i minori di ordine $\sigma-2$ possono formarsi soltanto colle $2^a, 3^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ orizzontale, quelli di ordine $\sigma-3$ soltanto colla $3^a, 4^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ e così via.

Così, ad esempio, nel caso di $\sigma=5$ si avranno soltanto minori di ordine 4 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

minori di ordine 3 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

minori di ordine 2 formati colla matrice

$$\begin{matrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

e finalmente le semplici variabili

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5$$

128. I determinanti minori contenuti nella matrice (3) e scelti colla restrizione indicata nell'art. prec. soddisfano evidentemente alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta} = 0 \qquad \mathcal{D}_{\xi\zeta} = 0 \quad \ldots \quad \mathcal{D}_{\xi t} = 0$$
$$\mathcal{D}_{\eta\zeta} = 0 \quad \ldots \quad \mathcal{D}_{\eta t} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

e quindi anche i loro aggregati soddisferanno alle stesse equazioni. Possiamo dunque anche dire che nella espressione (2) le $\chi(\xi\,;\eta\,;\zeta\,;\ldots\,;t)$ sono forme algebrice soddisfacenti alle $(\sigma-1)(\sigma-2)$ equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{pq}\chi = 0 ,$$

varianti della forma fondamentale $f$ (che si chiameranno co-varianti elementari).

Vediamo dunque che: *una forma algebrica $f$ con $n$ serie di variabili $n^{ple}$ si può sviluppare in una somma di termini che procedono secondo le potenze del determinante delle variabili, ogni potenza di tale determinante venendo moltiplicata per una somma di polari di forme $\mathcal{E}$ che contengono soltanto $n-1$ delle serie di variabili. Le forme $\mathcal{E}$ sono covarianti di $f$, che si possono dedurre da $f$ mediante l'operazione $\Omega$ e mediante operazioni di polare.*

124- Finalmente il caso di $\sigma > n$ dà luogo ad uno sviluppo analogo allo sviluppo (12), colla differenza che in luogo della potenza $i^{esima}$ di un unico determinante, si potrà avere uno qualunque dei prodotti di $i$ determinanti del tipo:

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \cdot & \cdot & x_k \\ y_\nu & y_h & \cdot & \cdot & y_k \\ z_\nu & z_h & \cdot & \cdot & z_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_\nu & t_h & \cdot & \cdot & t_k \end{vmatrix} , \qquad \nu, h, \ldots k = 1, 2, 3, \ldots, \sigma .$$

Si ha, infatti, in questo caso:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t) = \sum_{\nu,h,\dots,k} \left\{ \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \dots & x_k \\ y_\nu & y_h & \dots & y_k \\ z_\nu & z_h & \dots & z_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ t_\nu & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \dots & a_k \\ b_\nu & b_h & \dots & b_k \\ c_\nu & c_h & \dots & c_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ e_\nu & e_h & \dots & e_k \end{vmatrix} \right\}$$

sicchè, se indichiamo con $\Pi_i$ uno qualunque dei prodotti di $i$ determinanti del tipo (16) e con $Q_i$ il prodotto dei corrispondenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \dots & a_k \\ b_\nu & b_h & \dots & b_k \\ c_\nu & c_h & \dots & c_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ e_\nu & e_h & \dots & e_k \end{vmatrix},$$

la potenza $i^{esima}$ del determinante $(a_x b_y c_z \dots e_t)$ si esprimerà come una somma di parti del tipo

$$\Pi_i \cdot Q_i ,$$

onde si vede dalle (7) ed (8) che $f$ si potrà esprimere come somma di termini del tipo

$$\Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \left\{ Q_i\, a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \dots a_t^{\alpha_{n-1}}\, b_y^{\mu-i}\, c_z^{\nu-i} \dots e_t^{\rho-i} \right\}$$

$$= \Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}$$

dove, come è chiaro, le $\mathcal{E}$ sono anche qui delle forme che contengono soltanto le $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$.

125. Per $n = 2$ lo sviluppo (12) ha la forma semplicissima:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv \overset{m}{a_x}\,\overset{\mu}{b_y} = \sum_i (xy)^i \cdot \Delta_i\, \mathcal{E}^{(i)} \quad , \qquad \mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i\, \overset{m-i}{a_y}\, \overset{\mu-i}{b_y}$$

dove l'operazione di polare $\Delta_i$, potendosi sempre ritenere (cfr. art. 118) della forma $\sum_h A\, \mathcal{D}_{yx}^k \mathcal{D}_{xy}^h$, in cui le $A$ sono coefficienti costanti, non può essere, a meno di un coefficiente numerico, che $\mathcal{D}_{xy}^{m-i}$. Possiamo quindi anche scrivere:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv \overset{m}{a_x}\,\overset{\mu}{b_y} = \sum_i \alpha_i \cdot (xy)^i \cdot \mathcal{D}_{yx}^{m-i}\, \mathcal{E}^{(i)} \tag{16}$$

dove le $\alpha_i$ sono dei coefficienti numerici ed

$$\mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i\, \overset{m-i}{a_y}\, \overset{\mu-i}{b_y} = \frac{1}{\underline{|m-i}\;\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}\, \mathcal{D}_{xy}^{m-i}\, \Omega_{xy}^{i} f \,.$$

La determinazione dei valori dei coefficienti numerici $\alpha$ verrà da noi fatta nel capitolo sulle forme binarie *

---

(*) Lo sviluppo (16) è conosciuto sotto il nome di sviluppo di Clebsch e Gordan. Esso si può considerare come il fondamento del trattato classico di Clebsch: *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872).

Questo sviluppo è stato esteso dapprima al solo campo ternario (Capelli: *sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili*, nel Giornale di Battaglini vol. XVIII, 1880). Lo sviluppo più generale è stato poi dato, con altrettante dimostrazioni differenti, nelle seguenti memorie:

*Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (l.c. 1882). Cfr. anche: *Sur les opérations dans la théorie générale des formes alg.* (Mathem. Annalen Bd. XXVII) — *Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1891) — *Nuova dimostraz. del teorema sullo sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1892) — Quest'ultima è appunto la dimostraz. da noi qui riportata. Un'altra dimostrazione dello sviluppo per polari è stata data da J. Deruyts (Cfr. *Essai d'une théorie générale des formes algebriques*; Bruxelles, 1891).

## §.XXIII *Corollarii dello sviluppo stabilito nel precedente §.*

126 - Sia $f(x;y;z;\dots t)$ una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie $\sigma$; e supponiamo $n > \sigma - 1$. Se $n > \sigma$, applicando più volte di seguito il primo caso (art. 122) dello sviluppo per polari stabilito nel §. prec., la forma $f$ si rappresenterà dapprima come somma di polari di forme con sole $n-1$ serie; queste poi alla lor volta come polari di forme con sole $n-2$ serie e così di seguito, finchè si giungerà evidentemente ad una espressione, che rappresenterà la $f$ come una somma di polari di forme $\varphi$ con sole $\sigma$ serie di variabili (e queste forme $\varphi$ saranno esse stesse delle polari di $f$). A questo punto si applicherà alle $\varphi$ il secondo caso (art. 123) nello sviluppo per polari, ottenendosi dalle espressioni della forma:

$$\varphi \equiv \varphi(\xi;\eta;\dots;t) = \sum (\xi\,\eta\dots t)^i \Delta_{\xi\eta\dots t}\, \psi(\eta;\zeta;\dots t)$$

essendo $\xi, \eta, \dots t$ le ultime $\sigma$ delle serie $x, y, z, \dots t$ e $\Delta_{\xi\eta\dots t}$ delle operazioni di polari fra queste $\sigma$ serie $\xi, \eta, \dots, t$. Se dunque si sostituiscono queste espressioni delle $\varphi$ nella espressione precedentemente trovata per $f$:

$$f(x;y;z;\dots;t) = \sum \Delta_{xyz\dots t}\, \varphi(\xi;\eta;\dots;t)$$

e si considera per es. che:

$$\mathcal{D}_{\xi x}(\xi\,\eta\dots t) = (x\,\eta\dots t)$$

ecc., è chiaro che si potrà anche scrivere:

$$f(x;y;z;\dots;t)=\sum(\dots y\dots z\dots)^i\,\Delta_{xyz\dots t}\,\psi(\eta;\zeta;\dots;t)$$

dove $(\dots y\dots z\dots)$ può essere uno qualunque dei determinanti di ordine $\sigma$ che si possono formare con $\sigma$ serie scelte a piacere fra le $x, y, z, \dots, t$.

Se ci arrestiamo a questo punto della riduzione successiva data dallo sviluppo del §. prec. concludiamo intanto che *una forma algebrica $f$ con un numero comunque grande di serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie $\sigma$ si può sempre esprimere come un aggregato razionale intero di covarianti identici, formati colle serie $x, y, z, \dots, t$ e di polari di forme algebriche $\psi$, che contengono soltanto $\sigma-1$ serie di variabili. Queste forme $\psi$ sono poi esse stesse delle polari di $f$.*

Questo teorema ci permetterà evidentemente di limitare lo studio dei covarianti di un sistema di forme fondamentali $n^{\text{arie}}$ al caso in cui le forme fondamentali contengano al più $n-1$ serie di variabili. Così, ad esempio, nel campo binario si considereranno ordinariamente soltanto forme fondamentali e covarianti di forme fondamentali, che contengono un'unica serie di variabili. Nel campo ternario si studiano invece forme e covarianti di forme con una o due serie di variabili; e così via.

127. Nulla però c'impedisce di proseguire anche più oltre nell'applicazione dello sviluppo anche a forme alge-

briche di specie $\sigma$ che contenga soltanto $\sigma-1$ serie di variabili, al più. Applicando ad una forma $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots, t)$ contenente soltanto $\sigma-1$ serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$ di specie $\sigma$ il caso terzo (art. 123) dello sviluppo del §. prec., si otterrà dapprima per $\psi$ un'espressione della forma:

$$\psi(\xi\,;\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Delta_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)$$

dove $\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\ldots t}$ esprime un prodotto di determinanti di ordine $\sigma-1$ del tipo:

$$\begin{vmatrix} \xi_r & \xi_k & \cdots & \xi_h \\ \eta_r & \eta_k & \cdots & \eta_h \\ \zeta_r & \zeta_k & \cdots & \zeta_h \\ \vdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ t_r & t_k & \cdots & t_h \end{vmatrix} \qquad , \; r, k, \ldots, h = 1, 2, \ldots, \sigma$$

Applicando poi di nuovo lo stesso procedimento ad ogni forma $\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)$ si otterrà per ognuna di esse un'espressione della forma analoga:

$$\theta(\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\Delta_{\eta\zeta\ldots t}\,\vartheta(\zeta\,;\ldots;t),$$

cosicchè, sostituendo quest'ultime espressioni nella precedente, si potrà scrivere:

$$\psi(\xi\,;\eta\,;\zeta\,;\ldots;t)=\sum \nabla_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\vartheta(\zeta;\ldots;t)$$

dove $\nabla_{\xi\eta\zeta\ldots t}$ esprime un'operazione di polare fra le $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$. Così procedendo si finirà evidentemente per concludere che una forma algebrica $\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ con $\sigma-1$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, t$ di specie $\sigma$ si può esprimere come somma di polari di forme del tipo:

$$\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-3)}_{\zeta\ldots t}\cdots\Pi^{(1)}_{t}. \tag{1}$$

In altri termini:

$$\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)=\sum\Delta_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t) \tag{2}$$

dove le forme $\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ contengono le $\sigma(\sigma-1)$ variabili delle $\sigma-1$ serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$ soltanto in certe combinazioni speciali. E precisamente le $\chi$ sono aggregati di determinanti minori dei vari ordini $1, 2, \ldots, \sigma-1$ appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_\sigma \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_\sigma \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_\sigma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_\sigma \end{matrix} \tag{3}$$

colla restrizione che i minori di ordine $\sigma-2$ possono formarsi soltanto colle $2^a, 3^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ orizzontale, quelli di ordine $\sigma-3$ soltanto colla $3^a, 4^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ e così via.

Così, ad esempio, nel caso di $\sigma=5$ si avranno soltanto minori di ordine 4 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

minori di ordine 3 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

minori di ordine 2 formati colla matrice

$$\begin{matrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix} ,$$

e finalmente le semplici variabili

$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix}$$

128. I determinanti minori contenuti nella matrice (3) e scelti colla restrizione indicata nell'art. prec. soddisfano evidentemente alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta} = 0 \qquad \mathcal{D}_{\xi\zeta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \mathcal{D}_{\xi t} = 0$$
$$\mathcal{D}_{\eta\zeta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \mathcal{D}_{\eta t} = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

e quindi anche i loro aggregati soddisferanno alle stesse equazioni. Possiamo dunque anche dire che nella espressione (2) le $\chi(\xi ; \eta ; \zeta ; \ldots ; t)$ sono forme algebrice soddisfacenti alle $(\sigma-1)(\sigma-2)$ equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{pq}\chi = 0 ,$$

essendo $p$ una qualunque delle serie $\xi, \eta, \zeta, \cdots, t$ e $q$ una qualunque delle serie che si trovano scritte dopo la serie $p$ nell'ordine di successione $\xi, \eta, \zeta, \cdots \tau$. Reciprocamente è facile dedurre dal nostro sviluppo per polari che ogni funzione $\chi$ soddisfacente a queste equazioni alle derivate parziali è un aggregato di determinanti minori del tipo definito all'art. precedente.

129. Supponiamo infatti, per meglio fissare le idee, di avere una forma algebrica $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t})$ con quattro serie di variabili $x, y, z, t$ di specie qualsivoglia $\sigma$, la quale soddisfi alle equazioni alle derivate parziali:

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_{xy} f = 0 \;, \quad \mathcal{D}_{xz} f = 0 \;, \quad \mathcal{D}_{xt} f = 0 \\ \mathcal{D}_{yz} f = 0 \;, \quad \mathcal{D}_{yt} f = 0 \\ \mathcal{D}_{zt} f = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Se poniamo per brevità:

$$H^{(-i+1)}_{xyz\ldots t} \cdots H^{(-3)}_{xyz\ldots t} H^{(-2)}_{xyz\ldots t} H^{(-1)}_{xyz\ldots t} H_{xyz\ldots t} \equiv K^{(i)}_{xyz\ldots t} \,,$$

lo sviluppo per polari applicato alla $f$ si può esprimere come segue (come appare dalle formole (7), (8) e (9) del §. prec.)

$$f(\overset{m}{x}; y; z; t) = \sum_{i+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} K^{(i)}_{xyzt} \mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2} \mathcal{D}_{xt}^{\alpha_3} f$$

onde resterà soltanto in virtù delle (5):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta_{xyzt} K^{(m)}_{xyzt} f \tag{6}$$

essendo $\Delta_{xyzt}$ una certa operazione di polare fra le serie

$x, y, z, t$.

Applicando ora lo stesso sviluppo per polari alla forma:

$$K^{(m)}_{xyzt} f$$

nella quale le $x$ si considerino come delle costanti, e considerando che per la permutabilità delle $K$ e per le (5) si ha:

$$\mathcal{D}_{yz} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{yz} f = 0$$

$$\mathcal{D}_{yt} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{yt} f = 0 \quad ,$$

si avrà similmente:

$$K^{(m)}_{xyzt} f = \Delta_{yzt} K^{(\mu)}_{yzt} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\}$$

e sostituendo in (6):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta \Delta_{yzt} K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \, . \tag{7}$$

Si applicherà ora lo sviluppo per polari alle forme:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f$$

in cui si considerino come costanti le $x$ e le $y$, osservando che si ha per l'ultima delle (5):

$$\mathcal{D}_{zt} \left\{ K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{zt} f = 0 \, ,$$

e si otterrà analogamente:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f = \Delta_{zt} K^{(\nu)}_{zt} \left\{ K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \right\} ,$$

e sostituendo in (7):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta \Delta_{yzt} \Delta_{zt} K^{(\nu)}_{zt} K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \, . \tag{8}$$

130- Ciò premesso, sia

$$f = a_x^{m} b_y^{\mu} c_z^{\nu} d_t^{\rho}$$

la rappresentazione simbolica di $f$. Si avrà primieramente (§ XXII, art. 120) a meno di un coefficiente numerico.

$$K_{xyzt}^{(m)} f \equiv (a_x b_y c_z d_t)^m b_y^{\mu-m} c_z^{\nu-m} d_t^{\rho-m}$$

d'onde, poichè:

$$K_{yzt}^{\mu} = H_{yz\ldots}^{(-\mu+1)} H_{yzt}^{(-m)} \cdot K_{yzt}^{(m)} = K_{yzt}^{(m)} \cdot H^{(-\mu+1)} \ldots H_{yzt}^{(-m)}$$

si deduce:

$$K_{yzt}^{(\mu)} K_{xyzt}^{(m)} f = K_{yzt}^{(m)} \left\{ (a_x b_y c_z d_t)^m \cdot K_{yzt}^{(\mu-m)} b_y^{\mu-m} c_z^{\nu-m} d_t^{\rho-m} \right\}$$

cioè anche, sempre a meno di un coefficiente numerico:

$$K_{yzt}^{(\mu)} K_{xyzt}^{(m)} f = K_{yzt}^{(m)} \left\{ (a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu} \right\}.$$

Sostituendo ciò in (8) si ottiene per $f$, poichè l'operazione $K_{yzt}^{(m)}$ è permutabile con $K_{zt}^{(\nu)}$, una espressione della forma:

$$f = \Delta_{xyzt} K_{zt}^{(\nu)} \left\{ (a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu} \right\}$$

dove $\Delta_{xyzt}$ è una certa operazione di polare fra le $x$, $y$, $z$, $t$.

Procedendo allo stesso modo di testè, si osserverà ora che:

$$K_{zt}^{(\nu)} = H_{zt}^{(-\nu+1)} \ldots H_{zt}^{(-\mu)} K_{zt}^{(\mu)} = K_{zt}^{(\mu)} \cdot H_{zt}^{(-\nu+1)} \ldots H_{zt}^{(-\mu)}$$

cosicchè:

$$K_{zt}^{(\nu)}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}$$

$$= K_{zt}^{(\mu)}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} \cdot K_{zt}^{(\nu-\mu)} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}$$

quindi, a meno di un coefficiente numerico:

$$= K_{zt}^{(\mu)}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu}\right\}$$

ncludiamo dunque che $f$ si può scrivere sotto la forma:

$$f = \Delta_{xyzt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu}\right\}.$$

altra parte se in ogni termine dell'operazione di po-
re $\Delta_{xyzt}$ s'immaginano eseguite per prime come è lecito
(art. 50) le operazioni:

$$\mathcal{D}_{xy},\ \mathcal{D}_{xz},\ \mathcal{D}_{xt},\ \mathcal{D}_{yz},\ \mathcal{D}_{yt},\ \mathcal{D}_{zt}$$

quali tutte annullano identicamente la forma

$$(a_x b_y c_z d_t)^m (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu} \qquad (9)$$

vede che ogni termine di $\Delta$ si potrà ritenere essere
n prodotto di operazioni elementari scelte fra le ri-
anenti:

$$\mathcal{D}_{yx},\ \mathcal{D}_{zx},\ \mathcal{D}_{tx},\ \mathcal{D}_{zy},\ \mathcal{D}_{ty},\ \mathcal{D}_{tz}.$$

Ma le $\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{tx}$ non possono intervenire nel pro-
otto, poichè il grado di (9) nelle $x$ è già uguale al gra-
o di $f$ nelle stesse $x$. Similmente si vede, poichè la (9)
la $f$ sono dello stesso grado nelle $y$ che non potran-
o poi intervenire neanche le $\mathcal{D}_{zy}$ $\mathcal{D}_{ty}$, ecc. L'operazio-

ne $\Delta_{xyzt}$ equivarrà ad una semplice moltiplicazione delle (9) per un certo coefficiente numerico.

Dunque: se $f(x^m, y^\mu, z^\nu, t^\rho) \equiv a_x^m b_y^\mu c_z^\nu d_t^\rho$ è una forma algebrica soddisfacente alle equazioni alle derivate parziali

$$\mathcal{D}_{xy} f = 0,\ \mathcal{D}_{xz} f = 0,\ \mathcal{D}_{xt} f = 0,\ \mathcal{D}_{yz} f = 0,\ \mathcal{D}_{yt} f = 0,\ \mathcal{D}_{zt} f = 0,$$

essa non differisce che di un semplice fattore numerico dal suo covariante:

$$(a_x\, b_y\, c_z\, d_t)^m (b_y\, c_z\, d_t)^{\mu-m} (c_z\, d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu} \tag{10}$$

131 - Poichè:

$$(a_x\, b_y\, c_z\, d_t) = \sum_{r,s,k,h} \begin{vmatrix} x_r & x_s & x_k & x_h \\ y_r & y_s & y_k & y_h \\ z_r & z_s & z_k & z_h \\ t_r & t_s & t_k & t_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_k & a_h \\ b_r & b_s & b_k & b_h \\ c_r & c_s & c_k & c_h \\ d_r & d_s & d_k & d_h \end{vmatrix}$$

dove gli indici $r < s < k < h$ possono variare da $1$ a $\sigma$ ($\sigma$ essendo la specie delle serie $x, y, z, t$), e poichè similmente:

$$(b_y\, c_z\, d_t) = \sum_{r,k,h} \begin{vmatrix} y_r & y_k & y_h \\ z_r & z_k & z_h \\ t_r & t_k & t_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_r & b_k & b_h \\ c_r & c_k & c_h \\ d_r & d_k & d_h \end{vmatrix}, \quad r < k < h = 1, 2, \ldots, \sigma,$$

e:

$$(c_z\, d_t) = \sum_{r,k} \begin{vmatrix} z_r & z_k \\ t_r & t_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_r & c_k \\ d_r & d_k \end{vmatrix}, \quad r < k = 1, 2, \ldots, \sigma,$$

si vede che è così dimostrato quanto si è asserito in fine dell'art. 128, cioè che la forma $f(x;y;z;t)$ soddisfacente alle (5) è un aggregato di determinanti dei tipi:

$$\begin{vmatrix} x_r & x_s & x_k & x_h \\ y_r & y_s & y_k & y_h \\ z_r & z_s & z_k & z_h \\ t_r & t_s & t_k & t_h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_r & y_k & y_h \\ z_r & z_k & z_h \\ t_r & t_k & t_h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_r & z_k \\ t_r & t_k \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_r \end{vmatrix} = t_r \qquad r,s,k,h = 1,2,\dots\sigma$$

nel secondo dei quali come nel terzo non figurano più le serie $x, y$, nel mentre che il quarto si riduce alle semplici variabili $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$

---

## §. XXIV. *Serie di variabili aggiunte alla serie fondamentale (serie di variabili geometriche).*

### *Controvarianti e covarianti aggiunti. Esempi.*

132. Con $n$ serie $x, y, z, \dots, t$ di variabili di specie $\sigma (\sigma \geqq n)$ si dà origine alla matrice:

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & \dots\dots\dots, & x_\sigma \\ y_1, & y_2, & y_3, & \dots\dots\dots, & y_\sigma \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ t_1, & t_2, & t_3, & \dots\dots\dots & t_\sigma \end{matrix} \qquad (1)$$

nella quale sono contenuti $\binom{\sigma}{n}$ determinanti minori di ordine $n$:

$$(2)\quad p_{i,h,\dots k} = \begin{vmatrix} x_i & x_h & \dots & x_k \\ y_i & y_h & \dots & y_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ t_i & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} \quad , \; i < h < \dots < k = 1, 2, 3, \dots, \sigma$$

ed è facile riconoscere che ogni trasformazione lineare:

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_\sigma x_\sigma' = \alpha_{x'}$$

$$x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_\sigma x_\sigma' = \beta_{x'}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_\sigma = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_\sigma x_\sigma' = \varepsilon_{x'}$$

della serie fondamentale $x$ e delle sue cogredienti $y, z, \dots, t$ viene a stabilire una trasformazione, del pari lineare, delle $p_{i,h,\dots,k}$ nelle corrispondenti trasformate:

$$p'_{i,h,\dots,k} = \begin{vmatrix} x_i' & x_h' & \dots & x_k' \\ y_i' & y_h' & \dots & y_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i' & t_h' & \dots & t_k' \end{vmatrix}$$

Infatti, se $\gamma, \delta, \dots, \lambda$ sono rispettivamente quelle fra le lettere $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ che occupano i posti $i^{mo}, h^{mo}, \dots, k^{mo}$, sostituendo in (2) le espressioni delle $x, y, \dots$ date dalle (3), viene:

$$p_{i,h,\dots,k} \begin{vmatrix} \gamma_{x'} & \delta_{x'} & \lambda_{x'} \\ \gamma_{y'} & \delta_{y'} & \lambda_{y'} \\ \gamma_{t'} & \delta_{t'} & \lambda_{t'} \end{vmatrix} = \sum_{j,r,\dots,s} \begin{vmatrix} \gamma_j & \gamma_r & \dots \gamma_s \\ \delta_j & \delta_r & \dots \delta_s \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_j & \lambda_r & \lambda_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_j' & x_r' & \dots x_s' \\ y_j' & y_r' & \dots y_s' \\ \dots & \dots & \dots \\ t_j' & t_r' & \dots t_s' \end{vmatrix}$$

il che, se poniamo per brevità:

$$\begin{vmatrix} \gamma_j & \gamma_r & \cdot & \gamma_s \\ \delta_j & \delta_r & \cdot\cdot & \delta_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_j & \lambda_r & \cdot\cdot & \lambda_s \end{vmatrix} = \omega_{j,r,\ldots,s}^{i,h,\ldots,k} \tag{5}$$

si può anche scrivere:

$$p_{i,h,\ldots,k} = \sum_{j,r,\ldots,s} \omega_{j,r,\ldots,s}^{i,h,\ldots,k}\, p'_{j,r,\ldots,s} \tag{6}$$

Vediamo dunque che ogni sostituzione lineare (3) dà origine ad una sostituzione lineare ben determinata delle variabili $p_{i,h,\ldots,k}$ nelle variabili $p'_{i,h,\ldots,k}$, i cui coefficienti $\omega_{j,r,\ldots,s}^{i,h,\ldots,k}$ di grado $n$ nei coefficienti delle (3), sono i determinanti minori di ordine $n$ contenuti nella matrice dei coefficienti della stessa (3)

Le $p_{i,h,\ldots,k}$ considerate come delle nuove variabili diremo che formano una serie (di rango $n$) aggiunta alla serie fondamentale $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$. La serie di specie $\sigma$ e di rango 1 sarà evidentemente la stessa serie $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$.

La sostituzione lineare che lega le $p_{i,h,\ldots,k}$ alle $p'_{i,h,\ldots,k}$ la chiameremo una sostituzione lineare di rango $n$ aggiunta alla sostituzione (3). La sostituzione lineare di specie $\sigma$ e di rango 1 sarà evidentemente la stessa sostituzione ordinaria (3) di specie $\sigma$.

133. La sostituzione lineare di specie $\sigma$ e di rango $\sigma-1$ non

differisce sostanzialmente dalla sostituzione lineare di specie $\sigma$ contragrediente (cfr. §. VI) alla sostituzione fondamentale (3).

Infatti, supposto $n = \sigma - 1$, e detta $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\sigma$ una nuova serie di variabili cogredienti alla serie (1), risulta manifestamente dalle espressioni (2) delle $p_{1,2,\dots i-1, i+1,\dots,\sigma-1}$ che:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} (-1)^{i+1} \xi_i \, p_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots\sigma-1} = (\xi \, x \, y \dots t),$$

cosicchè, se poniamo:

$$p_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,\sigma-1} = (-1)^{i+1} \cdot (\xi \, x \, y \dots t) \cdot u_i \, ,$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi_i \, u_i = 1 \, .$$

Se in corrispondenza alla sostituzione (3) le $\xi$ si trasformano nelle $\xi'$ e le $u$ nelle $u'$, si avrà dunque:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi_i \, u_i = \sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi'_i \, u'_i$$

d'onde appare appunto (cfr. §. VI) che le $u'$ si deducono dalle $u$ colla sostituzione controgrediente alla (3).

134. Se $u, v, \dots$ sono delle serie di variabili controgredienti alla (3) e se in virtù delle (3) un certo sistema di forme fondamentali $f, \varphi, \dots$ (cfr. §. XII) coi coefficienti $A, B, \dots$ si cambia nel sistema $f, \varphi, \dots$ coi coefficienti $A', B', \dots$, ogni funzione razionale $R(A; B; \dots; u; v; \dots)$ che soddisfa al

l'eguaglianza:

$$R(A'; B'; \ldots; u'; v'; \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots) R(A; B; \ldots; u; v; \ldots)$$

essendo $\chi$ funzione dei soli coefficienti $\alpha, \beta, \ldots$ della sostituzione lineare (3), si dice essere un controvariante del sistema fondamentale $f, \varphi, \ldots$

Un esempio importante di controvariante di un'unica forma fondamentale $n^{aria}$: $f(x)$, si ha eliminando le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fra le equazioni

$$f(x) = 0, \quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, u_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (7)$$

Si otterrà un'equazione:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

e la forma $\varphi$ sarà appunto un controvariante di $f$; come facilmente si comprende se si riflette che le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ si trasformano (cfr. §. VI art. 39) colla sostituzione lineare controgrediente a quella eseguita sulle $x_1, \ldots, x_n$.

Passiamo a riconoscere ciò per il caso di forme quadratiche.

135. Sia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} x_i x_j \qquad (8)$$

una forma quadratica $n^{aria}$. Eliminando le $x$ fra le equazioni (7) o, che è la stessa cosa(*), fra le equazioni:

---

(*) poichè: $2f(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$.

$$u_x = 0, \quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, u_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{9}$$

al quale oggetto le (9) si svolgeranno nel caso attuale sotto la forma seguente:

$$0 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

$$\tfrac{1}{2} u_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tfrac{1}{2} u_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \quad ,$$

si trova:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

dove $\varphi$ è una forma quadratica rispetto alle variabili controgredienti $u_1, u_2 \ldots, u_n$ che si chiama la forma quadratica aggiunta alla $f$. Indicando con $A_{ik}$ l'aggiunto di $a_{ik}$ nel determinante:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \, ,$$

si può anche scrivere, come facilmente si riconosce sviluppando il determinante (10) secondo i prodotti di un elemento della prima orizzontale per un elemento della prima verticale:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{ij} u_i u_j \tag{11}$$

136. Vogliamo riconoscere direttamente, col solito metodo, che la forma $\varphi$ definita nella (11) è un covariante di $f$. Moltiplicando $\varphi$ per il solito covariante identico $K=(\xi\,\eta\ldots\omega)$ formato con $n$ serie ausiliarie $\xi\,\eta\ldots\omega$ cogredienti alla serie $x$, si può scrivere:

$$\varphi . K = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & u_\xi & u_\eta & \cdots & u_\omega \\ u_1 & f_1(\xi) & f_1(\eta) & \cdots & f_1(\omega) \\ u_2 & f_2(\xi) & f_2(\eta) & \cdots & f_2(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & f_n(\xi) & f_n(\eta) & \cdots & f_n(\omega) \end{vmatrix},$$

posto per brevità

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \frac{1}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f_i(x).$$

Se ora si moltiplica ancora per $K$ e si eseguisce la moltiplicazione per orizzontali, dopo però avere invertito la matrice dell'ultimo determinante testè scritto, si trova:

$$\varphi \cdot K^2 = \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} 0 & u_\xi & u_\eta & \cdots & u_\omega \\ u_\xi & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\xi}f(\xi) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\eta}f(\xi) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\omega}f(\xi) \\ u_\eta & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\xi}f(\eta) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\eta}f(\eta) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\omega}f(\eta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_\omega & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\xi}f(\omega) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\eta}f(\omega) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\omega}f(\omega) \end{vmatrix}$$

Di qui risulta appunto il carattere invariantivo di $\varphi$, poichè ogni elemento del determinante che sta nel secondo

membro, sia esso della forma $u_\xi$ o della forma $\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\eta} f(\xi)$, è già per sè stesso una forma invariantiva (cfr. §§. V e VI).

137. Il concetto di controvariante dato all' art. 133 si può evidentemente generalizzare considerando covarianti aggiunti di qualsivoglia rango del sistema delle $f, \varphi, \ldots$. Così, p. es., un covariante aggiunto di 3° rango sarà una funzione $R(A; B; \ldots; p_{123}, p_{124}, p_{234}, \ldots; q_{123}, q_{124}, q_{234}, \ldots; \ldots)$ dei coefficienti $A, B, \ldots$, delle serie di variabili aggiunte di 3° rango $p_{ihk}$, e di altre serie simili $q_{ihk}, \ldots$ soddisfacente alla condizione:

$$R(A'; B'; \ldots; p'_{ihk}; q'_{ihk}; \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots) R(A; B; \ldots; p_{ihk}; q_{ihk}; \ldots)$$

138. Più generalmente ancora, si potranno formare per il sistema fondamentale delle $f, \varphi, \ldots$ i così detti covarianti misti, cioè delle funzioni:

$$R(A; B; \ldots; x; y; \ldots; p_{ih}; q_{ih}; \ldots; p_{ihk}; q_{ihk}; \ldots)$$

contenenti un numero qualunque di serie di variabili di ogni rango, soddisfacenti alla condizione:

$$R(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots; p'_{ih}; q'_{ih}, \ldots; p'_{ihk}; q'_{ihk}; \ldots) =$$
$$= \chi(\alpha, \beta, \ldots) \cdot R(A; B; \ldots; x; y; \ldots p_{ih}; q_{ih}; \ldots; p_{ihk}; q_{ihk}; \ldots).$$

Tutti questi covarianti, se si sostituisce in essi, in luogo delle variabili di ogni serie $p_{i,h,\ldots,k}$ di rango $\mu$ le loro espressioni, analoghe alle (2), composte con $\mu$ serie cogredienti alla serie fondamentale $x$, si cambiano evidentemente per quanto si è visto, in covarianti ordinari

compiti serie di variabili tutte cogredienti alle $x$. Di qui segue p.es. che anche per i covarianti misti il fattore $\chi(\alpha, \beta, \cdots)$ esser dovrà una potenza intera del determinante dei coefficienti della sostituzione fondamentale; ecc.

159. Chiuderemo questo §. con un'osservazione importante. Dalle cose dette nel §. precedente risulta che una forma algebrica con un numero qualunque di serie di variabili $x\, y z \ldots t$ di specie $\sigma$ si può sempre esprimere come un aggregato di covarianti identici e di polari di forme $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots t)$ che contengono soltanto $\sigma-1$ serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots t$ e soddisfano alle condizioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta}\chi = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{\xi\zeta}\chi = 0 \, , \ldots \mathcal{D}_{\xi t}\chi = 0, \; \mathcal{D}_{\eta\zeta}\chi = 0, \ldots$$

Ora, secondo quanto si è poi anche dimostrato in quello stesso paragrafo, una forma $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots, s, \tau, t)$ soddisfacente a queste condizioni, si può anche considerare come una forma

$$\vartheta(t\,;\, p_{ik}\,;\, p_{ihk}\,; \ldots)$$

contenente la sola serie $t$, ed inoltre: la serie aggiunta di 2° rango

$$p_{i,h} = \begin{vmatrix} \tau_i & \tau_h \\ t_i & t_h \end{vmatrix} , \qquad i, h = 1, 2, \ldots, \sigma$$

la serie aggiunta di 3° rango

$$p_{i,h,k} = \begin{vmatrix} s_i & s_h & s_k \\ \tau_i & \tau_h & \tau_k \\ t_i & t_h & t_k \end{vmatrix} \qquad i, h, k = 1, 2, \ldots, \sigma$$

e così una sola serie di ogni rango fino alla serie di rango $\sigma - 1$:

$$p_{i,h,\ldots k} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_h & \cdots & \xi_k \\ \eta_i & \eta_h & \cdots & \eta_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_i & \tau_h & \cdots & \tau_k \\ t_i & t_h & \cdots & t_k \end{vmatrix} , \quad i, h, \ldots k = 1, 2, \ldots, \sigma$$

Concludiamo dunque che *una forma algebrica con un numero qualunque di serie di variabili di specie $\sigma$, si può sempre ridurre, secondo i procedimenti indicati, a forme che contengono soltanto $\sigma - 1$ serie di ranghi tutti differenti e precisamente una sola serie fondamentale, una sola serie aggiunta di 2° rango, una sola di 3° rango, ecc.* (*)

(*) Cfr. Clebesch: *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. 17, 1872).

# CAPITOLO II

## *Processi invariantivi - Equazioni differenziali dei covarianti. Rappresentazione delle forme invariantive.*

### §. I. *L'operazione $\Omega$ eseguita su aggregati di elementi lineari*

1. Si ha spesso occasione di dover eseguire l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$, fra $n$ serie $n^{\text{arie}}$ $x, y, z, \ldots t$, sopra una forma espressa come aggregato degli $rn$ elementi lineari (Cfr. Cap. I, §. 7)

$$\begin{array}{cccc} a_x, & b_x, & c_x, & \ldots e_x \\ a_y, & b_y, & c_y, & \ldots e_y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_t, & b_t, & c_t, & \ldots e_t \end{array} \qquad (1)$$

che si possono formare colle $n$ serie $x, y, \ldots, t$ e con $r$ serie di coefficienti arbitrarii: $a, b, c, \ldots e$. Poichè, però, il risultato dell'operazione $\Omega$ applicata ad una somma di più parti non è che la somma dei risultati dell'operazione stessa applicata ad ogni singola parte, così basterà evidentemente che ci occupiamo dell'operazione $\Omega$ applicata ad un semplice prodotto:

$$a_x^{p_1} b_x^{q_1} c_x^{r_1} \ldots e_x^{s_1} a_y^{p_2} b_y^{q_2} c_y^{r_2} \ldots e_y^{s_2} \ldots\ldots a_t^{p_n} b_t^{q_n} c_t^{r_n} \ldots e_t^{s_n} \qquad (2)$$

di elementi scelti comunque fra gli elementi (1).

2. A quest'oggetto noi potremo dapprima ricercare il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ applicata ad un prodotto della forma:

$$\alpha'_x\,\alpha''_x\ldots\alpha^{(\mu)}_x\,\beta'_y\,\beta''_y\ldots\beta^{(\nu)}_y\ldots\varepsilon'_t\,\varepsilon''_t\ldots\varepsilon^{(\lambda)}_t \qquad (3)$$

in cui le serie di coefficienti:

$$\alpha',\ \alpha'',\ldots,\alpha^{(\mu)},\ \beta',\ \beta'',\ldots\beta^{(\nu)},\ldots,\ \varepsilon',\ \varepsilon'',\ldots\varepsilon^{(\lambda)}$$

siano tutte distinte fra loro; giacchè basterà poi supporre che una parte di queste serie coincida colla serie $b$, e così via, perchè il prodotto (3) si cambi nel prodotto (2) e per conseguenza il risultato da noi ottenuto operando su (3) si cambi in quello stesso risultato che si sarebbe dovuto ottenere operando direttamente sul prodotto (2).

3. Ora il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ applicata al prodotto (3), che indicheremo brevemente con $Q$, è dato da

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda}\ldots\sum_{h=1}^{h=\nu}\sum_{i=1}^{i=\mu}\left(\alpha^{(i)}\beta^{(h)}\ldots\varepsilon^{(k)}\right)Q_{ih\ldots k} \qquad (4)$$

dove con $Q_{ih\ldots k}$ s'intende lo stesso prodotto $Q$ nel quale manchino però gli elementi $\alpha^{(i)}_x,\ \beta^{(h)}_y,\ldots,\varepsilon^{(k)}_t$.

Si ha infatti, per le ordinarie regole di derivazione del calcolo differenziale:

$$\frac{\partial^n Q}{\partial x_1\,\partial y_2\ldots\partial t_n}=\sum_{k=1}^{k=\lambda}\ldots\sum_{h=1}^{h=\nu}\sum_{i=1}^{i=\mu}\alpha^{(i)}_1\,\beta^{(h)}_2\ldots\varepsilon^{(k)}_n\,Q_{ih\ldots k} \qquad (5)$$

d'onde segue subito la (4), poichè:

$$\Omega_{xyz\ldots t}\, Q = \sum \pm \frac{\partial^n Q}{\partial x_1\, \partial y_2 \ldots \partial t_n}$$

ed

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \cdots \varepsilon^{(k)}) = \sum \pm \alpha_1^{(i)} \beta_2^{(h)} \ldots \varepsilon_n^{(k)}$$

4. Detto ora $P$ il prodotto (2) si passerà poi dal risultato $\Omega_{xyz\ldots t}\, Q$ espresso da (4) al risultato $\Omega_{xyz\ldots t}\, P$ nel modo già accennato, sostituendo cioè dapertutto in luogo di certe serie $\alpha_1 \ldots\ldots$ l'unica serie $a$, in luogo di certe altre serie $\alpha'_1 \ldots\ldots$ l'unica serie $b$ e così via. In questa sostituzione si presenteranno però naturalmente due specie di riduzioni, cioè primieramente sarà inutile scrivere, perchè identicamente nulli, quei termini

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \ldots \varepsilon^{(k)})\, Q_{ih\ldots k}$$

di (4) nei quali due delle serie $\alpha^{(i)}, \beta^{(h)}, \ldots, \varepsilon^{(k)}$ riuscissero eguali fra loro; in secondo luogo si riuniranno in un unico termine con un opportuno coefficiente numerico (intero e positivo) tutti quei termini che riusciranno identicamente uguali. Il coefficiente col quale si presenterà, in tal modo, un termine qualunque

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \ldots \varepsilon^{(k)})\, Q_{ih\ldots k}$$

sarà evidentemente il prodotto degli $n$ numeri che esprimono rispettivamente quante volte la serie $\alpha^{(i)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a_x^{p_1}\, b_x^{q_1} \ldots e_x^{s_1},$$

quante volte la serie $\beta^{(h)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a_y^{p_2}\ b_y^{q_2} \dots e_y^{s_2}$$

e così via.

Pertanto il numero dei termini distinti sarà dato in generale da $r(r-1)\dots(r-n+1)$, numero delle disposizioni $n$ ad $n$ delle $r$ serie $a, b, c, \dots, e$.

5. Esempio. Dato il prodotto di elementi lineari ternarii:

$$P = a_x^{m}\ b_x^{m'}\ d_x^{m''}\ b_y^{p}\ c_y^{p'}\ c_z^{q}\ d_z^{q'},$$

si troverà dapprima:

$$\begin{aligned}\Omega_{xyz} P = {} & mpq(abc)\, a_x^{m-1}\ b_x^{m'}\ d_x^{m''}\ b_y^{p-1}\ c_y^{p'}\ c_z^{q-1}\ d_z^{q'} \\ & + mpq'(abd)\, a_x^{m-1}\ b_x^{m'}\ d_x^{m''}\ b_y^{p-1}\ c_y^{p'}\ c_z^{q}\ d_z^{q'-1} \\ & + mp'q'(acd)\, a_x^{m-1}\ b_x^{m'}\ d_x^{m''}\ b_y^{p}\ b_y^{p'-1}\ c_z^{q}\ d_z^{q'-1} \\ & + m'p'q'(bcd)\, a_x^{m}\ b_x^{m'-1}\ d_x^{m''}\ b_y^{p}\ c_y^{p-1}\ c_z^{q}\ d_z^{q'-1} \\ & + m''pq(dbc)\, a_x^{m}\ b_x^{m'}\ d_x^{m''-1}\ b_y^{p-1}\ c_y^{p'}\ c_z^{q-1}\ d_z^{q'}\end{aligned}$$

e si potrà poi anche scrivere:

$$\Omega_{xyz} P = \begin{bmatrix} mpq(abc)\, b_x\ d_x\ c_y\ d_z \\ + mpq'(abd)\, b_x\ d_x\ c_y\ c_z \\ + mp'q'(acd)\, b_x\ d_x\ b_y\ c_z \\ + m'p'q'(bcd)\, a_x\ d_x\ b_y\ c_z \\ + m''pq(bcd)\, a_x\ b_x\ c_y\ d_z \end{bmatrix} a_x^{m-1}\ b_x^{m'-1}\ d_x^{m''-1}\ b_y^{p-1}\ c_y^{p'-1}\ c_z$$

Quest'ultima espressione mette in evidenza che per ap-

plicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ al prodotto (2), basterà applicarla al prodotto più semplice:

$$a_x\, b_x\, c_x \cdots e_x\, a_y\, b_y\, c_y \cdots e_y \cdots\cdots a_t\, b_t\, c_t \cdots e_t \qquad (2')$$

moltiplicare poi ogni termine del risultato ottenuto per quelli fra gli esponenti

$$p_1, q_1, r_1, \ldots, s_1, p_2, q_2, r_2, \ldots, s_2, \ldots\ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots s_n$$

che corrispondono a quegli $n$ elementi lineari (2') che non figurano nel termine stesso; per ultimo moltiplicare il tutto per lo stesso prodotto (2) in cui tutti gli esponenti siano stati diminuiti di un'unità.

6. Volendo applicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ più volte di seguito sul prodotto (2) si procederà allo stesso modo ora indicato sopra ciascuno dei termini ottenuti colla prima applicazione dell'operazione; onde si vede che il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ eseguito consecutivamente un numero qualsiasi di volte sopra un aggregato degli elementi lineari (1) sarà un aggregato degli stessi elementi lineari (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi $n^{arie}$:

$$(\ldots b \ldots d \ldots)$$

che si possono formare cogli $r$ simboli $a, b, c, \ldots, e$ combinati $n$ ad $n$.

Esempio. Vogliasi applicare due volte di seguito l'operazione $\Omega_{xyz}$ al prodotto ternario:

$$P = a_x\, b_x\, d_x\, b_y\, c_y\, c_z\, d_z \;;$$

Si troverà dapprima come sopra:

$$\Omega_{xyz} P = (abc)\, b_x\, d_x\, c_y\, d_z + (abd)\, b_x\, d_x\, c_y\, c_z$$
$$+ (acd)\, b_x\, d_x\, b_y\, c_z + (bcd)\, a_x\, d_x\, b_y\, c_z + (bcd)\, a_x\, b_x\, c_y\, d_z.$$

Di poi si troverà:

$$\Omega_{xyz} \left[ b_x\, d_x\, c_y\, d_z \right] = (bcd)\, d_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[ b_x\, d_x\, c_y\, c_z \right] = 0$$

$$\Omega_{xyz} \left[ b_x\, d_x\, b_y\, c_z \right] = (dbc)\, b_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[ a_x\, d_x\, b_y\, c_z \right] = (abc)\, d_x + (dbc)\, a_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[ a_x\, b_x\, c_y\, d_z \right] = (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x \quad ,$$

onde si concluderà:

$$\Omega^2_{xyz} P = 2(abc)(bcd)\, d_x + 2(acd)(bcd)\, b_x + 2(bcd)^2 a_x$$
$$= 2(bcd) \left[ (abc)\, d_x + (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x \right]$$

7. - Se nel prodotto (2) ognuno dei simboli $a, b, c, \ldots, e$ si trova combinato con una sola serie di variabili co sicchè p. es. gli esponenti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ saranno tutti uguali all'infuori di uno, la prima delle due specie di riduzioni di cui si è parlato all'art. 4, non si presenterà neanche, onde, se sia:

$$P = a_x^{p_1}\, b_x^{p_2} \ldots d_x^{p_\mu}\, \alpha_y^{q_1}\, \beta_y^{q_2} \ldots \gamma_y^{q_\nu} \ldots \ldots u_t^{r_1}\, v_t^{r_2} \ldots w_t^{r_\lambda},$$

il risultato $\Omega_{xyz\ldots t} P$ si comporrà di $\mu\, \nu \ldots \lambda$ termini distinti e la somma totale dei coefficienti dei termini sarà data da.

$$(p_1+p_2+\cdots+p_\mu)(q_1+q_2+\cdots+q_\nu)\cdots(r_1+r_2+\cdots+r_\lambda)$$

Esempio. Applicando l'operazione $\Omega_{xy}$ al prodotto binario:

$$P = a_x^p\, b_x^q\, c_z^r\, \alpha_y^\lambda\, \beta_y^\mu\, \gamma_y^\nu ,$$

si ottiene:

$$\Omega_{xy} P = p\lambda\cdot(a\alpha)a_x^{p-1}\, b_x^q\, c_x^r\, \alpha_y^{\lambda-1}\, \beta_y^\mu\, \gamma_y^\nu$$

$$+ p\mu\cdot(a\beta)a_x^{p-1}\, b_x^q\, c_x^r\, \alpha_y^\lambda\, \beta_y^{\mu-1}\, \gamma_y^\nu$$

$$+ p\nu\cdot(a\gamma)a_x^{p-1}\, b_x^q\, c_x^r\, \alpha_y^\lambda\, \beta_y^\mu\, \gamma_z^{\nu-1}$$

$$+ q\lambda\cdot(b\alpha)a_x^p\, b_x^{q-1}\, c_x^r\, \alpha_y^{\lambda-1}\, \beta_y^\mu\, \gamma_z^\nu$$

. . . . . .

e si vede come la somma dei coefficienti:

$$p\lambda + p\mu + p\nu + q\lambda + q\mu + q\nu + r\lambda + r\mu + r\nu$$

sia appunto eguale a $(p+q+r)(\lambda+\mu+\nu)$.

8. Se poniamo (Cap. I, art. 127):

$$H^{(-i+1)}_{xyz\ldots t}\cdots H^{(-2)}_{xyz\ldots t}\, H^{(-1)}_{xyz\ldots t}\, H_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t} ,$$

e consideriamo che si ha identicamente, quando le $n$ serie $x, y, z, \ldots t$ sono di specie $n$ (Cap. I, art. 109):

$$(xyz\ldots t)^i\cdot \Omega^i_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t}$$

ed osserviamo inoltre che

$$(xyz\ldots t)(abc\ldots d) = (a_x\, b_y\cdots d_t),$$

vediamo che il risultato che si ottiene applicando l'operazione $K^{(i)}_{xyz\ldots t}$ ad un aggregato degli elementi (1) è un aggregato degli stessi elementi (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi del tipo $(a_x\, b_y \ldots d_t)$, che si possono formare cogli $r$ simboli $a, b, c, \ldots$ e combinati $n$ ad $n$.

Si avrà dunque, indicando con $f$ ed $F$ delle funzioni razionali intere:

$$K^{(i)}_{xyz\ldots t} f(a_x, a_y, \ldots a_t; b_x, b_y, \ldots b_t \ldots; e_x, e_y, \ldots e_t) \tag{6}$$
$$= F(a_x, a_y, \ldots a_t; b_x, b_y, \ldots b_t; \ldots; e_x, e_y, \ldots, e_t; \ldots, (a_x\, b_y \ldots d_t), \ldots),$$

ed è importante di osservare che questa identità sarà poi sempre vera qualunque sia la specie $\sigma$ delle $n$ serie $x, y, z, \ldots t$. Infatti, poichè $K^{(i)}_{xyz\ldots t}$ è un'operazione di polare, il primo membro dell'eguaglianza (6) non è che un aggregato razionale intero degli elementi lineari (1), cosicchè la (6) si può considerare come una identità fra gli elementi lineari (1) i quali, per $\sigma = n$, sono (Cap. I, art. 42) fra loro affatto indipendenti; tale identità dovrà dunque poi anche sussistere qualunque sia il valore di $\sigma$.

---

## §° II. *Applicazione allo sviluppo per polari*

Abbiamo dimostrato (Cap. I, art. 119) che, se $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \ldots; \overset{\rho}{t})$ è una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ di specie qualsivoglia $\sigma$, si ha una identità della forma:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\overset{\nu}{z};\dots;\overset{\rho}{t}) = \sum_{i+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} K^{(i)}_{xyz\dots t} \mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}} f \qquad (1)$$

dove le $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ sono delle operazioni di polare che possono dipendere soltanto dai gradi $m, \mu, \nu, \dots, \rho$; cioè sono affatto indipendenti dai valori particolari che si vorranno dare ai coefficienti della forma $f$.

Applichiamo questa forma di sviluppo al caso in cui la $f$ sia data sotto forma di un aggregato razionale intero degli $rn$ elementi lineari

$$\begin{array}{l} a_x,\ b_x,\ c_x,\ \dots,\ e_x \\ a_y,\ b_y,\ c_y,\ \dots,\ e_y \\ a_z,\ b_z,\ c_z,\ \dots,\ e_z \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_t,\ b_t,\ c_t,\ \dots,\ e_t \end{array} \qquad (2)$$

che si possono formare colle $n$ serie $x, y, z, \dots, t$ e con $r$ serie di coefficienti arbitrarii: $a, b, c, \dots, e$.

Per quanto si è visto nel §° precedente la forma:

$$K^{(i)}_{xyz\dots t} \mathcal{D}_{xy}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{xz}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}_{xt}^{\alpha_{n-1}} f \ ,$$

si presenterà, dopo aver eseguito su $f$ le operazioni accennate, come un aggregato di parentesi $n^{arie}$ del tipo

$$(\alpha_x\ \beta_y\ \gamma_z\ \dots\ \delta_t)\ ,$$

potendo le $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta$ scegliersi a piacere fra le $a, b, c, \dots, e$, e di elementi lineari (2) in cui non entri la serie $x$. Si potrà dunque scrivere:

$$f(x'''; y; z; \ldots; t) = \sum \Delta \left\{ (\alpha'_x \beta'_y \ldots \delta'_t)(\alpha''_x \beta''_y \ldots \delta''_t) \ldots (\alpha^{(i)}_x \beta^{(i)}_y \ldots \delta^{(i)}_t) \varphi(y; z; \ldots; t) \right\}$$

essendo le $\Delta$ delle operazioni di polare fra le $x, y, z, \ldots, t$ indipendenti dalle $a, b, \ldots, e$, ed essendo le $\varphi$ degli aggregati razionali interi degli $r(n-1)$ elementi lineari:

$$\begin{array}{l} a_y, \quad b_y, \quad c_y, \quad \ldots \quad e_y \\ a_z, \quad b_z, \quad c_z, \quad \ldots \quad e_z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_t, \quad b_t, \quad c_t, \quad \ldots \quad e_t \end{array}$$

9. Se ora applichiamo a ciascuna delle $\varphi(y; z; \ldots; t)$ lo stesso procedimento applicato alla $f(x; y; z; \ldots; t)$, potremo scrivere similmente:

$$\varphi(y; z; \ldots; t) = \sum \Delta_{yz\ldots t} \left\{ (\alpha'_y \beta'_z \ldots \delta'_t) \ldots (\alpha^{(i)}_y \beta^{(i)}_z \ldots \delta^{(i)}_t) \psi(z; \ldots; t) \right\}$$

essendo le $\psi(z; \ldots; t)$ aggregati razionali interi degli $r(n-2)$ elementi lineari:

$$\begin{array}{l} a_z, \quad b_z, \quad c_z, \quad \ldots \quad e_z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_t, \quad b_t, \quad c_t, \quad \ldots \quad e_t \end{array}$$

Sostituendo ciò in $f$ si otterrà un risultato della forma:

$$f(x; y; z; \ldots; t) = \sum \Delta \left\{ \Pi \psi(z; \ldots; t) \right\}$$

dove $\Pi$ è un prodotto di parentesi del tipo:

$$(a_x \beta_y \gamma_z \ldots \delta_t) \qquad \alpha, \beta, \ldots, \delta \equiv a, b, c, \ldots, e$$

Così procedendo si concluderà evidentemente che se $f$ è un aggregato razionale intero degli $rn$ elementi lineari che si possono formare con $n$ serie di variabili $x$, $y$, $z, \ldots, t$ e con $r$ serie di coefficienti $a, b, c, \ldots, e$ (così le une come le altre di specie qualsivoglia $\sigma$) si può sempre scrivere un'identità della forma

$$f = \sum \Delta_{xyz\ldots t} \Pi$$

in cui le $\Delta$ sono operazioni di polare fra le $x, y, z, \ldots t$ (indipendenti dalle $a, b, c, \ldots, e$) e $\Pi$ è un prodotto di parentesi appartenenti all'uno ed all'altro degli $n$ tipi:

$$(\alpha_x \beta_y \gamma_z \cdots \delta_t), (\alpha_y \beta_z \ldots, \delta_t), (\alpha_z \ldots \delta_t), \ldots, \alpha_t \qquad (4)$$

in cui le serie $\alpha, \beta, \ldots$ si possono scegliere a piacere fra le $r$ serie $a, b, c, \ldots, e$.

Poichè ognuna delle parentesi (3) è annullata identicamente da ognuna delle operazioni:

$$\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \ldots, \mathcal{D}_{xt}$$
$$\mathcal{D}_{yz}, \ldots, \mathcal{D}_{yt}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

possiamo aggiungere che ognuno dei prodotti $\Pi$ che figurano nella (3) è annullato identicamente da ogni operazione $\mathcal{D}_{pq}$ per la quale $p$ sia una qualunque delle $x, y, z, \ldots t$ e $q$ una qualunque delle serie che seguono

a $p$ nella successione $x, y, z, \ldots, t$.

10- Se facciamo in particolare $r = n$ e prendiamo per $f$ l'espressione:

$$f = a_x^m \, b_y^\mu \, c_z^\nu \, \ldots \, d_\tau^\lambda \, e_t^\rho$$

che rappresenta simbolicamente la forma algebrica più generale contenente le $n$ serie $x, y, z, \ldots \tau, t$ (di specie qualunque $\sigma$) rispettivamente agli ordini $m, \mu, \nu \ldots \lambda, \rho$, il risultato dell'art. prec. si traduce nel seguente teorema: *una forma algebrica con $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, \tau, t$ (di specie arbitraria $\sigma$) si può sempre esprimere come somma di polari di certe forme $\Pi$ le quali sono esse stesse delle polari* (*) *di $f$ e soddisfano alle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni differenziali:*

$$\begin{array}{r} \mathcal{D}_{xy}\Pi = 0\,, \quad \mathcal{D}_{xz}\Pi = 0, \ldots \mathcal{D}_{x\tau}\Pi = 0, \; \mathcal{D}_{xt}\Pi = 0 \\ \mathcal{D}_{yz}\Pi = 0, \ldots \mathcal{D}_{y\tau}\Pi = 0, \; \mathcal{D}_{yt}\Pi = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{D}_{\tau t}\Pi = 0 \end{array}$$

---

(*) E quindi sono dei covarianti di $f$. In questi covarianti ritroviamo le forme da noi già dedotte da $f$ nel Cap. I, che contenevano una sola delle serie fondamentali $x, y, \ldots$ ed inoltre le $\sigma - 2$ serie di variabili geometriche ad esse aggiunte (cfr. § XXIV, art. 139). A questi covarianti è stato dato dal *Deruyts* il nome di *covarianti primarii*.

## III. - Covarianti di covarianti -

Sia dato un sistema di forme fondamentali

$$f_1(x;y;\ldots),\ f_2(x;y;\ldots),\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

, una serie di variabili cumarie $x, y, \ldots$, con coefficienti
'atto arbitrarii $A, B, C, \ldots$; sia poi:

$$\varphi_1(x;y;\ldots),\ \varphi_2(x;y;\ldots),\ \ldots\ldots \qquad (2)$$

, sistema di covarianti del sistema (1) e si indichino con
, $P_2$, $P_3$, . . . i coefficienti dei singoli termini della for
, $\varphi_1$ e quindi uno qualunque di essi più brevemente con
con $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, . . . i coefficienti di $\varphi_2$ e quindi uno
alunque di essi con $Q$, ecc.

A differenza delle (1) nelle quali le $A, B, C, \ldots$ sono
bitrarie, i coefficienti $P, Q, R, \ldots$, quando si vogliano
usare le (2) non già come forme algebriche generali ma
ne covarianti delle (1), dovranno pensarsi sostituiti con
te funzioni razionali intere:

$$P = \overline{P}(A, B, C, \ldots), \qquad Q = \overline{Q}(A, B, C, \ldots)$$

, coefficienti $A, B, C, \ldots$ Perciò, in quanto si voglia met
e in evidenza che le (2) si considerano come covarian
delle (1), in luogo di scrivere semplicemente $\varphi_1(x;y;\ldots)$,
$x;y;\ldots)$, . . . scriveremo:

$$\varphi_1\left(x;\ y;\ \ldots;\ \overline{P}(A, B, C, \ldots)\right)$$

$$\varphi_2\left(x;\ y;\ \ldots;\ \overline{Q}(A, B, C, \ldots)\right)$$

. . . . . .

cosicchè, detti $A', B', C', \ldots$ i coefficienti nei quali si trasformano i coefficienti $A, B, C, \ldots$, quando si esegue nelle (1) la sostituzione lineare:

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' \qquad y_1 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots \quad (3)$$

$$x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \cdots + \varepsilon_n x_n' \qquad y_n = \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \cdots + \varepsilon_n y_n'$$

e detti rispettivamente $\tau_1, \tau_2, \ldots$ i pesi dei covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, sarà:

$$\varphi_1\left(x'; y'; \ldots; \bar{P}(A', B', C', \ldots)\right) = \mathcal{D}^{\tau_1} \varphi_1\left(x; y; \ldots; \bar{P}(A, B, C, \ldots)\right)$$

$$\varphi_2\left(x'; y'; \ldots; \bar{Q}(A', B', C', \ldots)\right) = \mathcal{D}^{\tau_2} \varphi_2\left(x; y; \ldots; \bar{Q}(A, B, C, \ldots)\right) \quad (4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

essendo $\mathcal{D} = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \varepsilon_n$ il determinante della sostituzione lineare (3).

Ciò premesso, sia:

$$\psi(x; y; \ldots; P; Q; \ldots)$$

un covariante, di peso $\tau$, delle forme (2) considerate come forme affatto generali, il quale sia rispettivamente dei gradi $g_1, g_2, \ldots$ nei coefficienti di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Si avrà:

$$\psi(x'; y'; \ldots; P'; Q'; \ldots) = \mathcal{D}^{\tau} \psi(x; y; \ldots; P; Q; \ldots) \quad (5)$$

comunque si scelgano le $P, Q, \ldots$, purchè le $P', Q', \ldots$ rendano soddisfatte identicamente le uguaglianze:

$$\varphi_1(x; y; \ldots; P) = \varphi_1(x'; y'; \ldots; P')$$

$$\varphi_2(x; y; \ldots; Q) = \varphi_2(x'; y'; \ldots; Q') \quad (6)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

quando in queste uguaglianze si sieno espresse le $x'$ in funzione delle $x$, le $y'$ in funzione delle $y$, ecc. per mezzo delle (3). Ora le (4) ci dicono che le (6) sono appunto soddisfatte identicamente quando si prendano per le $P, Q, \ldots$ le funzioni:

$$\mathcal{D}^{\tau_1}\overline{P}(A, B, C, \ldots) \quad , \mathcal{D}^{\tau_2}\overline{Q}(A, B, C, \ldots), \quad \ldots,$$

e per le $P', Q', \ldots$ le funzioni:

$$\overline{P}(A', B', C', \ldots) \quad , \quad Q(A', B', C', \ldots).$$

Si avrà dunque facendo queste posizioni in (5):

$$\psi\Big(x'; y'; \ldots; \overline{P}(A', B', C', \ldots), \overline{Q}(A', B', C', \ldots), \ldots\Big)$$

$$= \mathcal{D}^{\tau + g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + \cdots}\psi\Big(x; y; \ldots; \overline{P}(A, B, C, \ldots), \overline{Q}(A, B, C, \ldots), \ldots\Big)$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che la forma $\psi$ considerata come funzione dei coefficienti delle (1) è un covariante del sistema (1) di peso $\tau + g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + \ldots$. Cioè: *i covarianti di covarianti di un sistema fondamentale sono anch'essi covarianti dello stesso sistema fondamentale*. E precisamente, se $\psi$ è un covariante di peso $\tau$ e di gradi $g_1, g_2$, rispettivamente nei coefficienti delle forme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le quali sono alla lor volta covarianti risp. dei pesi $\tau_1, \tau_2, \ldots$ di un certo sistema di forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots$, sarà anche $\psi$ un covariante, di peso $\tau + g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + \ldots$, del sistema $f_1, f_2, \ldots$.

12- Così, ad esempio, poichè l'Hessiano $H$ (Cap. I, §.
di una forma ennaria: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un suo cov
re, anche l'Hessiano dell'Hessiano, cioè la forma:

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

sarà un covariante della stessa forma fondamen
$f$. E precisamente sarà rispetto alla forma fondam
tale $f$ un covariante di peso $2(n+1)$, poichè nel caso
le: $\tau = 2$, $\tau_1 = 2$, $g_1 = n$.

13- Poichè qualunque polare di una forma fondame
è un suo covariante assoluto, segue dal teorema
l'art. 11 che: *le polari dei covarianti di un sistema*
*mentale sono covarianti assoluti dello stesso sistema*
*damentale*.

Perciò si usa dire che le operazioni di polare sono
*processi* (operativi) *invariantivi*; cioè dei processi
fanno perdere il carattere invariantivo alle form
cui vengono eseguiti.

14- Anche l'operazione di Cayley, $\Omega_{xyz\dots t}$ fra $n$
di variabili $x, y, z, \dots t$ costituisce un processo inva
tivo nel campo ennario.

Per riconoscere ciò, basta ricordare (Cap. I, art. 93) che

$$(x\,y\,z\ldots t)\cdot\Omega_{xyz\ldots t}=H_{xyz\ldots t}$$

dove $(x\,y\,z\ldots t)$ è un covariante identico ed $H_{xyz\ldots t}$, essend un operazione di polare, è appunto, secondo l'art. prec., i processo invariantivo.

---

## §° IV. *Processo invariantivo di Aronhold*

15. Siano:

$$f(x;y;\ldots;A_1,A_2,\ldots,A_\mu),\ F(x;y;\ldots;B_1,B_2,\ldots,B_\nu),\ldots$$

o, più brevemente:

$$f(x;y;\ldots;A),\ F(x;y;\ldots;B),\ \ldots$$

delle forme fondamentali di certi dati ordini nelle se di variabili $x, y, \ldots$, i cui coefficienti, affatto generali, no indicati per la $f$ con $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$, per la $F$ con $B_1, \ldots, B_\nu$, ecc.

Se $\varphi(x;y;\ldots;A_1,A_2,\ldots,A_\mu;B;\ldots)$ è un covariante qualunque del sistema (1), la solita equaglianza:

$$\varphi(x';y';\ldots;A'_1,A'_2,\ldots,A'_\mu;B';\ldots)=$$
$$=\mathcal{D}^r\cdot\varphi(x;y;\ldots;A_1,A_2,\ldots,A_\mu;B;\ldots)\qquad(2)$$

è soddisfatta qualunque siano le $x, y, \ldots A, B, \ldots$, purc $x', y', \ldots, A', B', \ldots$ siano i corrispondenti elementi tra sformati. Perciò la (2) continuerà ad essere soddisfatt se in luogo di $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ si ponga rispettivamente $A_1+\lambda E_1, A_2+\lambda E_2, \ldots, A_\mu+\lambda E_\mu$ ed in luogo di $A'_1, A'_2, \ldots$

si ponga $A'_1 + \lambda E'_1, A'_2 + \lambda E'_2, \ldots, A'_\mu + \lambda E'_\mu$, essendo $E_1, \ldots E_\mu$ dei coefficienti, affatto generali e indipendenti dalle $A, B, \ldots$, di una nuova forma

$$f(x; y; \ldots; E_1, E_2, \ldots, E_\mu)$$

simile alle $f(x; y; \ldots; A_1, A_2, \ldots A_\mu)$ ed $E'_1, E'_2, \ldots, E'_\mu$ i coefficienti della stessa forma trasformata mediante la sostituzione lineare che cambia le $x$ nelle $x'$, le $y$ nelle $y'; \ldots$; giacchè le relazioni lineari che legano le $A'$ alle $A$ sono quelle stesse che legano le $A' + \lambda E'$ alle $A + \lambda E$, qualunque sia il valore del parametro $\lambda$.

Se ora nell'uguaglianza così ottenuta:

$$\varphi(x'; y'; \ldots; A'_1 + \lambda E'_1, A'_2 + \lambda E'_2, \ldots, A'_\mu + \lambda E'_\mu; B'; \ldots)$$
$$= \mathcal{D}^\tau \cdot \varphi(x; y; \ldots; A_1 + \lambda E_1, A_2 + \lambda E_2, \ldots, A_\mu + \lambda E_\mu; B; \ldots)$$

si sviluppano e si ordinano i due membri secondo le potenze di $\lambda$, se ne deduce, uguagliando i coefficienti della prima potenza di questo parametro (che è, come si è notato, affatto arbitrario):

$$E'_1 \frac{\partial \varphi(x'; y'; \ldots A'; B'; \ldots)}{\partial A'_1} + E'_2 \frac{\partial \varphi(x; y; \ldots; A'; B'; \ldots)}{\partial A'_2} + \ldots + E'_\mu \frac{\partial \varphi(x'; y'; \ldots A'; B'}{\partial A'_\mu}$$
$$= \mathcal{D}^\tau \left\{ E_1 \frac{\partial \varphi(x; y; \ldots; A; B; \ldots)}{\partial A_1} + E_2 \frac{\partial \varphi(x; y; \ldots; A; B; \ldots)}{\partial A_2} + \ldots + E_\mu \frac{\partial \varphi(x; y; \ldots; A; B; \ldots}{\partial A_\mu} \right.$$

Pertanto: se $\varphi(x; y; \ldots; A; B; \ldots)$ è un covariante qualunque del sistema (1), la forma:

$$E_1 \frac{\partial \varphi}{\partial A_1} + E_2 \frac{\partial \varphi}{\partial A_2} + \ldots + E_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial A_\mu}$$

è un covariante del sistema

$$f(x;y;\ldots;A),\ f(x;y;\ldots;E),\ F(x;y;\ldots;B),\ldots$$

16. Il processo operativo rappresentato dal simbolo

$$E_1\frac{\partial}{\partial A_1}+E_2\frac{\partial}{\partial A_2}+\cdots+E_\mu\frac{\partial}{\partial A_\mu}, \tag{3}$$

(conosciuto col nome di *processo di Aronhold*) che, applicato alla forma $\varphi$ non ne toglie il carattere invariantivo (purchè si imagini opportunamente ampliato il sistema delle forme fondamentali) si può dunque riguardare come un processo invariantivo, precisamente come il processo di polare col quale ha stretta affinità. E appunto per mettere in evidenza tale affinità noi designeremo brevemente l'operatore (3) col simbolo $\mathcal{D}_{AE}$ affatto analogo al simbolo $\mathcal{D}_{xy}$ già adottato per le polari elementari. E' inutile aggiungere che la maggior parte delle proprietà svolte nel Cap. I per le operazioni di polare si estenderanno senz'altro alle operazioni composte come aggregati di simboli $\mathcal{D}_{AE}$, le quali non differiscono da quelle sostanzialmente, ma soltanto ne differiscono per la diversa interpretazione delle serie di variabili.

17. Se $A, E, \ldots, L$ sono $\mu$ serie di coefficienti tutti fra loro indipendenti, simili alla serie $A, A_2, \ldots, A_\mu$, si potrà considerare il simbolo operativo:

$$\Omega_{A,E,\ldots L}=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial A_1} & \frac{\partial}{\partial A_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial A_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial E_1} & \frac{\partial}{\partial E_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial E_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial L_1} & \frac{\partial}{\partial L_2} & & \frac{\partial}{\partial L_\mu} \end{vmatrix}$$

analogo a quello dell'operazione di Cayley fra le serie $x$; $y$; ecc.

Questo simbolo applicato ad un covariante qualunque: $\varphi(x;y;\dots;A;E;\dots;L;B;\dots)$ di un sistema fondamentale:

$$f(x;y;\dots;A),\ f(x;y;\dots;E),\ \dots,\ f(x;y;\dots;L),\ \varphi(x;y;\dots;B),\ \dots \quad (4)$$

lo trasformerà in un altro covariante dello stesso sistema, cioè: *anche il simbolo $\Omega_{A,E,\dots,L}$ rappresenta un processo invariantivo.*

Infatti dall'identità:

$$\left\{\sum \pm A_1 E_2 \dots L_\mu\right\} \cdot \Omega_{AE\dots L}\varphi = H_{AE\dots L}\varphi$$

di cui il secondo membro si è già dimostrato testè (art. 16) essere un covariante del sistema (4) ed in cui il determinante (1) è pure, come riscontreremo assai facilmente in seguito, un covariante dello stesso sistema, segue che $\Omega_{AE\dots L}\varphi$ è il quoziente di due covarianti, ed è quindi esso stesso un covariante; come d. d.

## §° V. *Applicazione alla rappresentazione dei covarianti*

18. Sia $\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)$ un covariante del sistema di forme fondamentali:

$$f(x;y;\dots;A),\ F(x;y;\dots;B),\ \dots\ , \quad (1)$$

il quale sia del grado $g$ nei coefficienti $A_1, A_2, \dots A_\mu$ della

forma $f$. Si considerino altre $g-1$ forme

$f_1 = f(x;y;\dots;A')$, $f_2 = f(x;y;\dots;A'')$, $\dots$, $f_{g-1} = f(x;y;\dots;A^{(g-1)})$

tutte simili alla $f$, con altrettante nuove serie di coefficienti generali

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_\mu \;;\; A''_1, A''_2, \dots, A''_\mu \;;\; \dots$$

indipendenti fra loro e da quelli della $f$.

Per quanto si è visto al 5° precedente, la forma:

$$A'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial A_1} + A'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial A_2} + \dots + A'_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial A_\mu}$$

o, più brevemente, $\mathcal{D}_{AA'}\varphi$ sarà un covariante del sistema fondamentale:

$$f, f_1, F, \dots$$

Quindi, per la stessa ragione, la forma:

$$\mathcal{D}_{AA''}\mathcal{D}_{AA'}\varphi$$

sarà un covariante del sistema fondamentale

$$f, f_1, f_2, F, \dots$$

e così procedendo verremo a dedurre dal covariante $\varphi$ la forma:

$$\psi = \mathcal{D}_{AA^{(g-1)}} \cdots \mathcal{D}_{AA''}\mathcal{D}_{AA'}\varphi \qquad (2)$$

la quale sarà un covariante del sistema:

$$f, f_1, f_2, \dots, f_{g-1}, F, \dots \qquad (1)'$$

Al covariante $\varphi$ del sistema (1) si viene così a sostituire il covariante $\psi$ del sistema (1)' il quale $\psi$ è di primo grado nei coefficienti di ciascuna delle forme $f, f_1, f_2, \dots f_{g-1}$.

E sarà poi sempre facile ritornare dal covariante $\psi$ al covariante $\varphi$, poichè la (2) ci dice, per una proprietà affatto ovvia delle operazioni di polare, che se nella forma $\psi$ si sostituisce, in luogo di ciascuna delle nuove serie $A', A'', \ldots$, la serie primitiva $A$, essa ricade (a meno di un coefficiente numerico eguale a $\lfloor g$) nel primitivo covariante $\varphi$.

19. Allo stesso modo si potrà poi sostituire al covariante $\psi$ del sistema (1)' un covariante $\vartheta$ del sistema

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_{g-1}, F, F_1, F_2, \ldots, F_{g'-1}, \ldots \qquad (1)''$$

ottenuto aggiungendo al sistema (1)' altre $g'-1$ forme fondamentali $F_1, F_2, \ldots, F_{g'-1}$ tutte simili alla $F$, essendo $g'$ il grado del covariante $\varphi$ nei coefficienti di $F$. Il covariante $\vartheta$ sarà lineare nei coefficienti di ciascuna delle forme fondamentali.

$$f, f_1, \ldots, f_{g-1}, F, F_1, \ldots F_{g'-1}$$

e ricadrà (a meno del coefficiente numerico $\lfloor g \lfloor g'$) nel primitivo covariante $\varphi$ appenachè tutte le $A', A'', \ldots$ si pongano eguali alle $A$ e tutte le $B', B'', \ldots$ eguali alle $B$.

Così procedendo si conclude evidentemente che da ogni covariante $\varphi$ del sistema (1) si può dedurre un covariante $\Phi$ del sistema ampliato:

$$f, f_1, \ldots f_{g-1}, F, F_1, \ldots F_{g'-1}, \ldots$$

lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamen-

tale, il quale ricade nel covariante $\varphi$ quando i coefficienti delle $f_1, f_2, \ldots, f_{g-1}$ si pongano eguali ai coefficienti delle $f$, così i coefficienti delle $F_1, F_2, \ldots F_{g-1}$ eguali ai coefficienti della $F$ ecc.

Vedremo meglio in seguito di quanta importanza sia questo teorema nello studio delle espressioni caratteristiche delle forme invariantive

---

## §° VI. Applicazione alla formazione di nuovi covarianti.

**19. Teorema.** *Se $\varphi$ e $\psi$ sono due covarianti qualisivogliano della forma fondamentale ennaria di ordine $m$:*

$$f = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \cdots \lfloor \alpha_n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad (1)$$

*anche la forma*

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial \psi}{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (2)$$

*è un covariante della stessa forma fondamentale.*

Per dimostrare ciò, basterà anche di dimostrare che è un covariante delle (1) la forma

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial \psi}{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \qquad (3)$$

nell'ipotesi che le serie $y, z, \ldots$ contenute in $\varphi$ siano diverse

dalla serie $x$ e dalle serie di variabili eventualmente contenute in $\psi$, giacchè se l'espressione (3) è un covariante, essa non cesserà evidentemente di essere tale se in luogo delle serie $y, z, \ldots$ contenute in $\varphi$ si pongano le serie $x, y, \ldots$ qualsivogliano.

Ciò premesso, si ha per il §° precedente che la forma:

$$\sum_{\alpha_1+\cdots\alpha_n=m} \frac{\partial\psi}{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \cdot B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \tag{4}$$

è un covariante del sistema composto dalla forma (1) e dalla forma fondamentale:

$$f_1 = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \cdots \lfloor\alpha_n} B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{5}$$

simile alla (1) con altri coefficienti affatto arbitrarii $B$. Che se poi prenderemo per le $B$ delle funzioni dipendenti dai coefficienti della (1) tali che la (5) sia un covariante della stessa (1), l'espressione (4) sarà un covariante di covarianti della (1) e quindi sarà essa stessa (cfr. §° III) un covariante della (1). Se dunque consideriamo che

$$\mathcal{D}_{yx}^{m}\varphi = \left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^m \varphi$$

$$= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \cdots \lfloor\alpha_n} \cdot \frac{\partial^m\varphi}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial y_2^{\alpha_2}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

è un covariante di $\varphi$ e quindi anche di $f$, vediamo che la (4) sarà un covariante di $\varphi$ semprechè si prenda:

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{\partial^m \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}$$

come appunto si doveva dimostrare.

20. Ciò che si è detto per due covarianti $\varphi$ e $\psi$ dell'unica forma fondamentale si estende senza difficoltà al caso di due covarianti di un sistema di più forme fondamentali.

Consideriamo ad esempio il sistema di due forme ennarie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{ed} \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n \qquad (6)$$

Si dimostrerà facilmente, analogamente a quanto si è fatto per la forma aggiunta di una forma quadratica (cfr. Cap. I §. XXIV) che la forma

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & u_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

è un suo covariante. Se quindi operiamo su di esso col simbolo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

essendo $\varphi$ un covariante qualunque di $f$, ne dedurremo un nuovo covariante del sistema (6). E quindi otterremo anche un covariante operando sul risultato un'altra volta col simbolo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial u_n}$$

il che equivale a porre nella espressione di $\psi$ in luogo di $u_1, u_2, \ldots, u_n$ rispettivamente $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots\ldots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$.

L'espressione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

è dunque un covariante della forma fondamentale $f$.

In questa espressione possiamo prendere per es. per $\varphi$ la stessa forma $f$, oppure la sua Hessiana (cfr. Cap. I, §° XII) ed otteremo così due nuovi covarianti della $f$.

---

## §° VII. *Rappresentazione simbolica di forme di gradi qualisivogliano nei coefficienti delle forme fondamentali. Esempî.*

21. Sia

$$f=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}\frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1\lfloor\alpha_2\cdots\lfloor\alpha_n}\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

una forma fondamentale generale di ordine $m$, di cui sia

$$f=a_x^m \qquad (1)'$$

(cfr. Cap. I, §° VIII) la espressione simbolica. Abbiamo veduto come ogni combinazione lineare dei coefficienti $A$ si possa esprimere senza ambiguità alcuna mercè i simboli $a_i$; non così per una combinazione delle $A$ di grado qualunque $g$. In tal caso però la rappresentazione simbolica si potrà fare ugualmente introducendo tante nuove serie di simboli $b_i$, $c_i$, ..., equivalenti ai simboli $a_i$, quanto è il grado $g$. Definendo infatti il significato simbolico delle $c_i$, $b_i$, ... come si è fatto per le $a_i$, cioè:

$$\overline{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n} = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n} = \dots, \qquad (2)$$

o, che è la stessa cosa, ponendo simbolicamente: (1)''

$$f = a_x^{m} = b_x^{m} = c_x^{m} = \dots,$$

si potrà rappresentare senza ambiguità ogni prodotto di $g$ coefficienti $\overline{A}$ mediante i suddetti simboli, adottando per ogni coefficiente un simbolo diverso. Così, per es., si potrà scrivere simbolicamente:

$$\overline{A}^2_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n}$$

$$\overline{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \overline{A}_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} b_1^{\gamma_1} b_2^{\gamma_2} \dots b_n^{\gamma_n} = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \dots a_n^{\gamma_n} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n}$$

$$\overline{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \overline{A}_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} \overline{A}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} b_1^{\gamma_1} b_2^{\gamma_2} \dots b_n^{\gamma_n} c_1^{\delta_1} c_2^{\delta_2} \dots c_n^{\delta_n},$$

e così via.

Rappresentando in tal modo i singoli termini di una forma

qualunque $F$ di grado $g$ nei coefficienti $A_i$, l'intera forma verrà definita simbolicamente senza alcuna ambiguità; poichè ogni serie di simboli si presenterà soltanto nelle combinazioni (2) e la $F$ sarà *lineare* rispetto alle combinazioni (2) formate con una stessa *serie di simboli*.

Vedremo come mediante la rappresentazione simbolica si possa dare a tutte le forme invariantive un'espressione caratteristica, cioè tale da rappresentare esclusivamente forme che godono della proprietà invariantiva. Ci limiteremo per ora a alcuni esempî.

22. Per rappresentare simbolicamente l'Hessiano di una forma fondamentale ennaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots = e_x^m = \dots, \qquad (3)$$

basta osservare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = m(m-1) a_x^{m-2} a_i a_j = m(m-1) b_x^{m-1} b_i b_j = \dots,$$

onde si può scrivere:

$$H = m^n (m-1)^n \begin{vmatrix} a_x^{m-2} a_1 a_1 & a_x^{m-2} a_1 a_2 & \dots & a_x^{m-2} a_1 a_n \\ b_x^{m-2} b_2 b_1 & b_x^{m-2} b_2 b_2 & \dots & b_x^{m-2} b_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_x^{m-2} c_n c_1 & c_x^{m-2} c_n c_2 & \dots & c_x^{m-2} c_n c_n \end{vmatrix}$$

od anche:

$$H = m^n (m-1)^n \cdot a_x^{m-2} b_x^{m-2} \dots e_x^{m-2} a_1 b_2 \dots e_n (a\, b \dots e)$$

ed eseguendo le $\underline{|n}$ sostituzioni possibili fra i simboli equi-

nti, il che non altera il valore dell'espressione, e som-
do quindi i risultati membro a membro:

$$\underline{2}\, H = m^n (m-1)^n \cdot a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} \ldots e_x^{m-2}\, (a\, b \ldots e) \sum \pm\, a_1\, b_2 \ldots e_n \qquad (4)$$

chè ogni sostituzione non fa che cambiare $(a\, b \ldots e)$ in
$b \ldots e)$ secondochè essa sia di classe pari o di classe di-
i.

a dunque:

$$H = \frac{m^n (m-1)^n}{\underline{|n}} \cdot a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} \ldots e_x^{m-2}\, (a\, b \ldots e)^2,$$

: *la Hessiana della forma ennaria (3) è rappresentata,*
*no di un fattore numerico, dal composto simbolico*

$$(a\, b \ldots e)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2} \ldots e_x^{m-2}.$$

In particolare, per una forma quadratica:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}\, x_i\, x_j = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \ldots = e_x^2 = \ldots \qquad (5)$$

o discriminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

otrà rappresentare simbolicamente come segue:

$$\Delta = \frac{2^n}{\underline{|n}} \cdot (a\, b\, c \ldots e)^2 \qquad (6)'$$

Vediamo ora come si rappresenti simbolicamente il

controvariante (Cfr. Cap. I, §° XXIV) della stessa forma fondamentale (5):

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,j} A_{ij}\, u_i u_j \qquad (7)$$

Essendo $A_{ij}$ l'aggiunto dell'elemento $a_{ij}$ nel determinante $\Delta$, si può scrivere evidentemente

$$A_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}$$

e per conseguenza

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n) = \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \delta . \Delta$$

indicando brevemente con $\delta$ il processo operativo di Aronhold:

$$\delta = \sum u_i u_j \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

che consiste nel derivare rispetto ai coefficienti della forma quadratica (5) e moltiplicare pei corrispondenti coefficienti della forma quadratica $u_x^2$. Per ottenere $\varphi$, basterà dunque eseguire tale operazione $\delta$ sopra ogni termine di $\Delta$ e sommare quindi i risultati. Ora è chiaro che se un termine qualunque di $\Delta$ è dato sotto la forma simbolica:

$$a_i a_j \cdot b_h b_k \cdot c_r c_s \cdots,$$

il risultato dell'operazione $\delta$ applicata a questo termine sarà:

$$
\begin{aligned}
& u_i\, u_j\, b_h\, b_k\, c_r\, c_s \ldots \\
+\ & a_i\, a_j\, u_h\, u_k\, c_r\, c_s \ldots \\
+\ & a_i\, a_j\, b_h\, b_k\, u_r\, u_s \ldots \\
+\ & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

cioè basterà sostituire il simbolo $u$ una volta al posto del simbolo $a$, una volta al posto di $b$, e così via e poi sommare i risultati. Ma sotto forma simbolica si aveva (a meno del fattore numerico):

$$\Delta = (a\, b\, c \ldots g\, e)^2.$$

Sarà quindi

$$\delta\Delta = (u\, b\, c \ldots g\, e)^2 + (a\, u\, c \ldots g\, e)^2 + (a\, b\, u \ldots g\, e)^2 + \ldots + (a\, b\, c \ldots g\, u)^2,$$

cioè:

$$\delta\Delta = n \cdot (a\, b\, c \ldots g\, u)^2,$$

giacchè, stante l'equivalenza dei simboli $a, b, c, \ldots$, i determinanti

$$(u\, b\, c \ldots g\, e)^2,\ (a\, u\, c \ldots g\, e)^2,\ \ldots$$

rappresentano tutti la stessa cosa. La forma aggiunta $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ della forma quadratica $f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \ldots = g_x^2 = \ldots$ è dunque rappresentata simbolicamente, a meno di un fattore numerico, da $(a\, b\, c \ldots g\, u)^2$; e precisamente si ha:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{2^n}{\underline{|n-1}} \cdot (a\, b\, c \ldots e\, u)^2 \qquad (7)'$$

25. Per le $n$ forme fondamentali ennarie:

$$f_1 = a_x^{m_1}, \quad f_2 = b_x^{m_2}, \quad \ldots, \quad f_n = e_x^{m_n} \qquad (8)$$

(dove ora i simboli $a, b, \ldots, e$ non sono più equivalenti, poichè appartengono a forme diverse) la Jacobiana (Cfr. Cap. I §° VI)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

sarà espressa simbolicamente così:

$$J = \begin{vmatrix} m_1 a_x^{m_1-1} a_1 & m_1 a_x^{m_1-1} a_2 & \ldots & m_1 a_x^{m_1-1} a_n \\ m_2 b_x^{m_2-1} b_1 & m_2 b_x^{m_2-1} b_2 & \ldots & m_2 b_x^{m_2-1} b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_n e_x^{m_n-1} e_1 & m_n e_x^{m_n-1} e_2 & \ldots & m_n e_x^{m_n-1} e_n \end{vmatrix}$$

ossia:

$$J = m_1 m_2 \ldots m_n \cdot (a\, b \ldots e) a_x^{m_1-1} b_x^{m_2-1} \ldots e_x^{m_n-1}. \qquad (9)$$

26. Ciò che si è visto poco fa (art. 24) circa il modo di eseguire il processo operativo di Aronhold sulle espressioni simboliche, vale affatto in generale. Sia infatti $\varphi$ una funzio-

intera omogenea di grado $g$ dei coefficienti di una for-
fondamentale

$$f = a_x^{m} = b_x^{m} = c_x^{m} = \dots$$

, voglia applicare ad essa il processo operativo:

$$\delta = \sum B_i \frac{\partial}{\partial A_i} \tag{10}$$

, le $A_i$ sono i coefficienti di $f$ e le $B_i$ i coefficienti cor-
ondenti di una forma simile:

$$F = \alpha_x^{m} = \beta_x^{m} = \dots$$

plicando il processo $\delta$ ad un termine qualunque di $\varphi$,
o prima sotto la forma simbolica mercè $g$ serie di sim-
equivalenti $a, b, c, \dots$, si avrà evidentemente:

$$\delta\left\{a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \dots b_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \dots c_n^{\rho_n} \dots\right\} =$$

$$= \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \dots \alpha_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \dots b_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \dots c_n^{\rho_n} \dots$$

$$+ a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n} \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \dots \alpha_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \dots c_n^{\rho_n} \dots$$

$$+ a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \dots b_n^{\nu_n} \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \dots \alpha_n^{\rho_n} \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

sì per tutti i termini di cui si compone $\varphi$. Se dunque
$', b_i, c_i, \dots)$ è la forma $\varphi$ espressa mercè i simboli equi-
nti $a, b, c, \dots$, si avrà:

$$\delta\varphi = \varphi(\alpha_i, b_i, c_i, \dots) + \varphi(a_i, \alpha_i, c_i, \dots) + \varphi(a_i, b_i, \alpha_i, \dots) + \dots$$

Data, per es., la forma fondamentale quaternaria:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{2^n}{\lfloor n-1} \cdot (a\, b\, c \ldots e\, u)^2$$

25. Per le $n$ forme fondamentali emmarie:

$$f_1 = a_x^{m_1}, \quad f_2 = b_x^{m_2}, \quad \ldots, \quad f_n = e_x^{m_n}$$

(dove ora i simboli $a, b, \ldots, e$ non sono più equivalenti chè appartengono a forme diverse) la Jacobiana (Cfr. Co §° VI)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

sarà espressa simbolicamente così:

$$J = \begin{vmatrix} m_1 a_x^{m_1-1} a_1 & m_1 a_x^{m_1-1} a_2 & \ldots & m_1 a_x^{m_1-1} a_n \\ m_2 b_x^{m_2-1} b_1 & m_2 b_x^{m_2-1} b_2 & \ldots & m_2 b_x^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_n e_x^{m_n-1} e_1 & m_n e_x^{m_n-1} e_2 & \ldots & \end{vmatrix}$$

ossia:

$$J = m_1 m_2 \ldots m_n \cdot (a\, b \ldots e) a_x^{m_1-1} b_x^{m_2-1} \ldots c$$

26. Ciò che si è visto poco fa (art. 24) circ
re il processo operativo di Aronhold s.
boliche, vale affatto in g.

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = d_x^m = \dots, \tag{11}$$

supponiamo si voglia eseguire sulla sua Hessiana:

$$H = (a\,b\,c\,d)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

il processo $\delta$, espresso dalla (10), derivando, cioè, la $H$ rispetto ai coefficienti $A$ di $f$ e moltiplicando i risultati pei corrispondenti coefficienti $B$ di una nuova forma fondamentale

$$f_1 = \alpha_x^m = \beta_x^m = \gamma_x^m = \delta_x^m = \dots$$

simile alla $f$.

Si avrà dapprima, secondo la regola data:

$$\delta f = (\alpha\,b\,c\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,\alpha\,c\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,b\,\alpha\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,b\,c\,\alpha)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

ossia, per l'equivalenza dei simboli $a, b, c, d$:

$$\delta f = 4(a\,b\,c\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}. \tag{12}$$

Applicando al nuovo covariante così ottenuto un'altra volta lo stesso processo $\delta$, si otterrebbe similmente:

$$\delta^2 f = 12(a\,b\,\beta\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}. \tag{13}$$

e, ancora poi:

$$\delta^3 f = 24(a\,\gamma\,\beta\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, \gamma_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}, \tag{14}$$

e similmente:

$$\delta^4 f = 24\,(\delta\gamma\beta\alpha)^2 \delta_x^{m-2}\,\gamma_x^{m-2}\,\beta_x^{m-2}\,\alpha_x^{m-2} \quad . \tag{15}$$

Abbiamo ottenuto così le espressioni simboliche di 4 nuovi covarianti, simultanei, del sistema fondamentale composto dalla $f$ e dalla $f_1$.

---

## §° VIII. *Costruzione di forme invariantive sotto la forma simbolica caratteristica* -

28. Le espressioni simboliche trovate nel §° precedente mettono senz'altro in evidenza il carattere invariantivo delle forme che esse rappresentano. Consideriamo, infatti, ad esempio, il covariante Hessiano:

$$H = (a\,b\,c)^2 a_x^{m-2}\,b_x^{m-2}\,c_x^{m-2} \tag{1}$$

della forma ternaria

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \tag{2}$$

La forma $F$ che si deduce da $F$ eseguendo sulle $x_1$, $x_2$, $x_3$ la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

si può rappresentare simbolicamente (Cfr. Cap. I, §° XI) con:

$$F = a_x'^m = b_x'^m = c_x'^m = \dots \tag{4}$$

dove il significato dei simboli $a'$, ... può desumersi da quello dei simboli $a$, ... mediante le sostituzioni linea-

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = d_x^m = \dots, \tag{11}$$

supponiamo si voglia eseguire sulla sua Hessiana:

$$H = (a\,b\,c\,d)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

il processo $\delta$, espresso dalla (10), derivando, cioè, la $H$ rispetto ai coefficienti $A$ di $f$ e moltiplicando i risultati pei corrispondenti coefficienti $B$ di una nuova forma fondamentale

$$f_1 = \alpha_x^m = \beta_x^m = \gamma_x^m = \delta_x^m = \dots$$

simile alla $f$.

Si avrà dapprima, secondo la regola data:

$$\delta f = (\alpha\,b\,c\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,\alpha\,c\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,b\,\alpha\,d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\,b\,c\,\alpha)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

ossia, per l'equivalenza dei simboli $a, b, c, d$:

$$\delta f = 4\,(a\,b\,c\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}. \tag{12}$$

Applicando al nuovo covariante così ottenuto un'altra volta lo stesso processo $\delta$, si otterrebbe similmente:

$$\delta^2 f = 12\,(a\,b\,\beta\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}. \tag{13}$$

E così poi:

$$\delta^3 f = 24\,(a\,\gamma\,\beta\,\alpha)^2 a_x^{m-2}\, \gamma_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2}, \tag{14}$$

e finalmente:

$$\delta^4 f = 24\,(\delta\gamma\beta\alpha)^2 \delta_x^{m-2}\,\gamma_x^{m-2}\,\beta_x^{m-2}\,\alpha_x^{m-2} \quad . \tag{15}$$

Abbiamo ottenuto così le espressioni simboliche di 4 mo. covarianti, simultanei, del sistema fondamentale compo. dalla $f$ e dalla $f_1$.

---

## VIII. *Costruzione di forme invariantive sotto la forma simbolica caratteristica* -

- Le espressioni simboliche trovate nel §° precedente ettono senz'altro in evidenza il carattere invariantivo lle forme che esse rappresentano. Consideriamo, infatti, esempio, il covariante Hessiano:

$$H = (a\,b\,c)^2 a_x^{m-2}\,b_x^{m-2}\,c_x^{m-2} \tag{1}$$

lla forma ternaria

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \tag{2}$$

forma $F$ che si deduce da $F$ eseguendo sulle $x_1, x_2$, la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

può rappresentare simbolicamente (Cfr. Cap. I, §° XI) a:

$$F = a_x'^m = b_x'^m = c_x'^m = \dots \tag{4}$$

ve il significato dei simboli $a', \dots$ può desumersi da ello dei simboli $a, \dots$ mediante le sostituzioni linea.

ci:

$$a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \gamma_1 a_3 \qquad b_1' = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2 + \gamma_1 b_3$$
$$a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \gamma_2 a_3 \ , \quad b_2' = \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 + \gamma_2 b_3 \ , \ . \ . \ . \ . \qquad (5)$$
$$a_3' = \alpha_3 a_1 + \beta_3 a_2 + \gamma_3 a_3 \qquad b_3' = \alpha_3 b_1 + \beta_3 b_2 + \gamma_3 b_3 \ .$$

Se ora indichiamo con $H'$ la stessa forma $H$ costruita per la forma trasformata $F'$, si ha evidentemente:

$$H' = (a'b'c')^2 a_x'^{\,m-2} b_x'^{\,m-2} c_x'^{\,m-2}$$

Volendo poi esprimere $H'$ coi coefficienti della forma $f$ e colle $x_1, x_2, x_3$, basterà esprimere le $x'$ colle $x$ mercè le (3) e sostituire ai simboli $a', b', c'$ i simboli $a, b, c$ mercè le (5). Ma per tali sostituzioni viene, come sappiamo (cfr. Cap. I §° VI):

$$a_x' = a_x \ , \ b_x' = b_x \ , \ c_x' = c_x \quad , \quad (a'b'c') = (\alpha\beta\gamma)(abc) \ ;$$

si ha dunque:

$$H' = (\alpha\beta\gamma)^2 \cdot (abc)^2 a_x^{\,m-2} b_x^{\,m-2} c_x^{\,m-2} \ ,$$

cioè appunto l'eguaglianza

$$H' = (\alpha\beta\gamma)^2 \cdot H$$

che ci dice essere $H'$ un covariante, di peso 2, della forma $f$.

29. La dimostrazione precedente vale evidentemente per qualunque aggregato razionale intero di elementi del tipo $a_x$ e di elementi (parentesi) del tipo $(abc)$, ovvero del tipo $(abcd)$ nel campo quaternario, ecc.

Supponendo, per fissare le idee, di stare nel campo terna,

rio, siano una o più forme fondamentali:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = d_x^m = \dots, f_1 = e_x^{m_1} = g_x^{m_2} = \dots, \dots \tag{6}$$

e sia $C$ un prodotto di elementi simbolici del tipo $a_x$, cioè di elementi analoghi ad:

$$a_x, b_x, c_x, \dots, e_x, g_x, \dots, a_y, b_y, c_y, \dots, e_y, g_y, \dots \tag{7}$$

e di elementi del tipo $(a\,b\,c)$ cioè analoghi ad:

$$(a\,b\,c), (a\,b\,d), (b\,c\,d), (a\,b\,e), (a\,e\,g), \dots \tag{8}$$

Tale prodotto avrà un significato effettivo, semprechè ognuna delle serie di simboli $a, b, \dots, e, g, \dots$ si trovi ad un grado eguale a quello della forma fondamentale cui si riferisce, e rappresenterà sempre un covariante del sistema fondamentale (6) proprio come all'art. prec.; poichè $C$ e $C'$ differiranno fra loro di $(\alpha\,\beta\,\gamma)^\tau$, essendo $\tau$ il numero degli elementi del tipo (8), cioè il numero di parentesi, che entrano come fattori in $C$. In particolare rappresenterà un invariante, se nella sua composizione entrano soltanto le parentesi. Si potrà poi anche aggiungere come fattori a $C$ un numero qualunque di parentesi del tipo $(x\,y\,z)$, essendo $x, y, z, \dots$ serie di variabili cogredienti alla serie $x$, ovvero del tipo $(a\,b\,u)$ essendo $u$ una serie di variabili controgrediente alla serie $x$. In tal caso se $\lambda$ è il numero dei fattori del tipo

$$(a\,b\,c) \quad \text{ovvero} \quad (a\,b\,u) \quad ,$$

e $\lambda'$ quello dei fattori del tipo $(x\,y\,z)$, si avrà:

$$C' = (\alpha\beta\gamma)^{\lambda-\lambda'} \cdot C$$

poichè i covarianti identici $(x\,y\,z)$, ... sono di peso $-1$. Cioè: il peso del covariante $C$ sarà dato dalla differenza fra il numero delle parentesi formate con serie di coefficienti simbolici (o di coefficienti di forme lineari) e il numero delle parentesi formate con serie di variabili cogredienti alla serie fondamentale $x$.

30. Prendendo poi una somma qualunque

$$k\,C + k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots$$

di più prodotti analoghi a $C$ moltiplicati per dei coefficienti numerici arbitrarî, si avrà ancora una forma invariantiva, del sistema fondamentale (6), omogenea nei coefficienti di ciascuna forma, ed in ogni serie di variabili, purchè si abbia cura che ogni prodotto $C, C_1, C_2, \dots$ contenga lo stesso numero di simboli equivalenti per ciascuna forma fondamentale, e che ogni serie di variabili $x, y, \dots, u, \dots$ entri in tutti allo stesso grado.

40. Le stesse cose valgono pel campo binario, quaternario, quinario, ecc. colla sola differenza che in luogo di parentesi simboliche o identiche del tipo $(a\,b\,c)$, $(a\,b\,u)$, $(x\,y\,z)$, ..., si considereranno parentesi del tipo $(a\,b\,c\,d)$, $(a\,b\,c\,u)$, $(a\,b\,u\,v)$, $(x\,y\,z\,t)$, ... e così via

La rappresentazione così ottenuta è la così detta rappresentazione simbolica caratteristica dei covarianti, poichè dimo

treremo, in uno dei §§ che seguono, che *reciprocamente ogni forma invariantiva (invariante, covariante, controvariante ordinario o misto) appartenente al sistema fondamentale ennato (6) è suscettibile di una cosiffatta rappresentazione.*

2 - E' importante di notare che le espressioni invariantive si costruite possono talvolta essere identicamente nulle, virtù della equivalenza dei simboli, senza che esse siano identicamente nulle quando i simboli si considerino ne quantità effettive tutte indipendenti fra loro.

si, ad esempio, se in luogo della Hessiana della forma terria fondamentale $f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots$, si considerasse la forma più semplice:

$$K = (a\,b\,c)\,a_x^{m-1}\,b_x^{m-1}\,c_x^{m-1},$$

facile riconoscere che valutando questa espressione nei coficienti effettivi di $f$, si troverebbe un risultato identicamente nullo. Infatti, poichè il simbolo $a$ è equivalente al mbolo $b$, il significato di $K$ non può cangiare se in luogo $a$ si scriva dappertutto $b$ e viceversa; cioè si ha anche:

$$K = (b\,a\,c)\,b_x^{m-1}\,a_x^{m-1}\,c_x^{m-1} = -(a\,b\,c)\,a_x^{m-1}\,b_x^{m-1}\,c_x^{m-1}.$$

i ha dunque:

$$K = -K,$$

nde appunto:

$$K = 0.$$

## §° IX. *Riduzione delle sostituzioni lineari.*

33. Per esprimere che $S$ è la sostituzione lineare definita dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, x_1' + a_{12}\, x_2' + \dots + a_{1n}\, x_n' \\ x_2 &= a_{21}\, x_1' + a_{22}\, x_2' + \dots + a_{2n}\, x_n' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}\, x_1' + a_{n2}\, x_2' + \dots + a_{nn}\, x_n' \;, \end{aligned} \tag{1}$$

scriveremo qualche volta per maggior comodità:

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1'}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema fondamentale: *qualunque sostituzione lineare fra n variabili si può sempre ottenere come la risultante di un numero finito di sostituzioni lineari appartenenti al tipo:*

$$x_1 = x_1', \dots, x_{h-1} = x_{h-1}', \; x_h = \varepsilon\, x_h', \; x_{h+1} = x_{h+1}', \dots, x_n = x_n' \tag{2}$$

*che indicheremo con* $S_h^{(\varepsilon)}$, *ovvero al tipo:*

$$x_1 = x_1', \dots, x_{h-1} = x_{h-1}', \; x_h = x_h' + x_k', \; x_{h+1} = x_{h+1}', \dots, x_n = x_n' \tag{3}$$

*che designeremo con* $S_{h,k}$.

34. Incominciamo dall'osservare che, essendo la $S$ rappresentata con (1), sarà:

$$S_h = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,h-1} & \varepsilon a_{1h} & a_{1,h+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,h-1} & \varepsilon a_{2h} & a_{2,h+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,h-1} & \varepsilon a_{nh} & a_{n,h+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$S_{h,k} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} & \cdots & a_{1k}+a_{1h} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2h} & \cdots & a_{2k}+a_{2h} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nh} & \cdots & a_{nk}+a_{nh} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

rchè resti stabilito il teorema che abbiamo enunciato. Ba-
rà dunque dimostrare che la matrice (1)' si può sempre
durre dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

e rappresenta la sostituzione identica) mediante le se-
enti operazioni: 1° moltiplicazione di una colonna per un
ttore costante diverso da zero, 2° aggiunzione ad una co-
una degli elementi corrispondenti di un'altra colonna.
- Venendo ora alla dimostrazione di quest'ultimo asser
cominciamo dal notare che gli elementi della prima oriz-

zontale del determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ non possono essere tutti nulli; chè altrimenti lo stesso determinante sarebbe nullo e la matrice (1)' non rappresenterebbe una sostituzione lineare propriamente detta, come supponiamo. Per conseguenza se il primo elemento $a_{11}$ fosse nullo, si potrà surrogarlo con un numero diverso da zero, aggiungendo alla prima colonna un'altra colonna, il cui primo elemento non sia nullo. Si potrà poi ottenere che gli altri elementi della prima orizzontale diventino tutti nulli, ove già non lo fossero, aggiungendo alla colonna $h^{\underline{esima}}$, se per es. $a_{1h}$ non fosse nullo, la prima colonna moltiplicata per il rapporto fra $-a_{1h}$ ed il primo elemento, che è diverso da zero. Dopo ciò il determinante dato dalla matrice (1) avrà assunto la forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

ed il suo valore sarà ancora diverso da zero; cosicchè gli $n-1$ elementi $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2n}$ non potranno essere tutti nulli.

Se $\alpha_{22}$ fosse nullo, lo si potrà dunque surrogare con un numero differente da zero, aggiungendo alla 2ª colonna una delle consecutive, il cui elemento non sia nullo; dopo dichè, aggiungendo alle $n-2$ colonne consecutive la stessa seconda colonna, moltiplicata ogni volta per un opportuno

e, si potrà ottenere che gli elementi $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \ldots \alpha_{2n}$ si
ano ad essere tutti nulli. Si troverà con ciò il deter-
nte primitivo ridotto alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

alore ancora diverso da zero, talchè almeno uno degli
nti $\alpha_{33}, \alpha_{34}, \ldots, \alpha_{3n}$ sarà diverso da zero.
endo allo stesso modo si perverrà evidentemente al-
ma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ tutte differenti da zero.
i resta a vedere come si passi dalla matrice (6) al-
trice (7). Per ottenere ciò, si comincerà dal moltipli-
la prima colonna di (6) per $\alpha_{11}$. Si aggiungerà poi
prima colonna di (6) la seconda moltiplicata per $\alpha_{21}$
moltiplicherà quindi la seconda colonna per $\alpha_{22}$. In
luogo si aggiungerà alla prima colonna la terza mol-
ta per $\alpha_{31}$, alla seconda la terza moltiplicata per $\alpha_{32}$

e si moltiplicherà quindi la terza colonna per $\alpha_{33}$. Dopo ciò le prime tre orizzontali di (6) si saranno cangiate nelle prime tre di (7), restando le altre affatto inalterate. Operando poi allo stesso modo sulla quarta orizzontale di (6), la si cangerà nella quarta di (7), e così di seguito finchè l'intera matrice (6) si trovi cangiata nella (7).

37. Non è senza importanza di notare che la seconda parte della riduzione, cioè la riduzione della matrice (6) alla matrice (7) è stata fatta, per quanto riguarda la seconda delle due specie di operazioni definite in fine dell'art. 34, in modo che a qualsiasi colonna si sono soltanto aggiunte le colonne di indice più elevato. Questa osservazione si traduce in fatti, per quanto si è visto all'art. 43, nel seguente teorema: *ogni sostituzione lineare del tipo:*

$$x_1 = \alpha_{11}\, x_1'$$

$$x_2 = \alpha_{21}\, x_1' + \alpha_{22}\, x_2'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \alpha_{n1}\, x_1' + \alpha_{n2}\, x_2' + \cdots + \alpha_{nn}\, x_n'$$

*è la risultante di sostituzioni lineari del tipo* $S_h^{(\varepsilon)}$ *e di sostituzioni del tipo* $S_{h,k}$ *nelle quali* $h > k$.

## X. Equazioni differenziali che caratterizzano i covarianti.

Siano $a, b, c, \ldots$ le serie omonime di simboli mediante
uali vengono rappresentate (cfr. §° VII) le forme del si-
ma fondamentale

$$f, f_1, f_2, \ldots$$

ia

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; \ldots; a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots b_n; \ldots)$$

iù brevemente $\varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots)$ un covariante qualun-
del sistema (1), il quale possa contenere le serie di va-
più cogredienti $x, y, \ldots$. Se nelle $f, f_1, \ldots$ si esegue u-
sostituzione lineare delle $x, y, \ldots$ nelle $x', y', \ldots$, le stes-
$f, f_1, \ldots$ si trasformeranno in altre forme $F, F_1, F_2, \ldots$
uali si potranno rappresentare simbolicamente (cfr.
III, art. 28) assolutamente come le $f, f_1, f_2, \ldots$ colla
a differenza che in luogo dei simboli $a, b, c, \ldots$ si por-
no i simboli $a', b', c', \ldots$ legati rispettivamente ai sim-
$a, b, c, \ldots$ della sostituzione lineare controgrediente
nella eseguita sulla serie $x$.

to $D$ il determinante della sostituzione lineare e $\tau$
eso del covariante $\varphi$, il carattere invariantivo della for-
$\varphi$ verrà dunque espresso dall'uguaglianza

$$\varphi(x'; y'; \ldots; a'; b'; \ldots) = D^{\tau} \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots)$$

Ciò posto, eseguiamo sulle $x, y, \ldots$ la sostituzione li-

neare, (di determinante $D=1$):

$$
\begin{array}{ll}
x_1' = x_1 & y_1' = y_1 \\
\cdots & \cdots \\
x_{h-1}' = x_{h-1} & y_{h-1}' = y_{h-1} \\
x_h' = x_h + \lambda x_k \quad , & y_h' = y_h + \lambda y_k \quad , \quad \cdots \quad (4) \\
x_{h+1}' = x_{h+1} & y_{h+1}' = y_{h+1} \\
\cdots & \cdots \\
x_n' = x_n & y_n' = y_n
\end{array}
$$

dalla quale consegue pei simboli $a, b, c, \ldots$ la sostituzione ad essa controgrediente:

$$
\begin{array}{ll}
a_1' = a_1 & b_1' = b_1 \\
\cdots & \cdots \\
a_{k-1}' = a_{k-1} & b_{k-1}' = b_{k-1} \\
a_k' = a_k - \lambda a_k \quad , & b_k' = b_k - \lambda b_h \quad , \quad \cdots \\
a_{k+1}' = a_{k+1} & b_{k+1}' = b_{k+1} \\
\cdots & \cdots \\
a_n' = a_n & b_n' = b_n
\end{array}
$$

Sostituendo queste espressioni in $\varphi(x'; y'; \ldots; a'; b'; \ldots)$ si ha per lo sviluppo di Taylor esteso fino ai termini che contengono la prima potenza di $\lambda$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x'; y'; \ldots; a'; b'; \ldots) &= \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) \\
&+ \lambda \cdot D_{hk}\varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) - \lambda \cdot \Delta_{kh}\varphi(x; y; \ldots; a\, b) \quad (5) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

dove con $D_{hk}$ e $\Delta_{hk}$ sono designati brevemente gli operatori

$$D_{hk} = x_k \frac{\partial}{\partial x_h} + y_k \frac{\partial}{\partial y_h} + \cdots \tag{7}$$

$$\Delta_{hk} = a_k \frac{\partial}{\partial a_h} + b_k \frac{\partial}{\partial b_h} + c_k \frac{\partial}{\partial c_h} + \cdots \tag{8}$$

ovendo il secondo membro di (5) coincidere col secondo
embro di (7) qualunque sia il valore del parametro ar-
rario $\lambda$, si ha dunque la condizione:

$$D_{hk}\, \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) = \Delta_{kh}\, \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) \tag{9}$$

. Reciprocamente, se la forma $\varphi$ costruita coi coefficien-
simbolici delle forme generali $f, f_1, f_2, \ldots$ soddisfa
la equazione alle derivate parziali (9), essa sarà un co-
riante del sistema $f, f_1, f_2, \ldots$ rispetto alla sostituzione
ieare (4), cioè la uguaglianza (3) sarà soddisfatta per
esto tipo di trasformazione lineare.

vero, supponiamo dapprima che fra i simboli $a, b, c, \ldots$
n ne siano di equivalenti, cioè che essi appartengono a
me fondamentali fra loro tutte distinte. In tal caso la
ndizione (9) deve essere soddisfatta identicamente anche
alle $a, b, \ldots$ si siano dei significati effettivi fra lo-
affatto indipendenti come alle $x, y, \ldots$; giacchè potendo
r esempio $f = a_x^m$ essere una forma affatto generale, nul-
ci impedisce di prendere poi in particolare per $f_1$ se
voglia, una potenza di una forma lineare arbitraria

e sostituire in (9), dopo eseguite le derivazioni simb. che, i coefficienti di $f$ corrispondenti a tale ipotesi ra ciò torna appunto a dire che la (9) dev'essere sod. sfatta qualunque siano i significati anche effetti. fra loro indipendenti, che si diano alle $x, y, \ldots, a$,

Ciò posto, introducendo per brevità il simbolo opera

$$(h,k) \equiv D_{hk} - \Delta_{kh} \quad ,$$

si vede che, come è soddisfatta identicamente rispe alle lettere $x, y, \ldots, a, b, \ldots$ l'uguaglianza:

$$(h,k)\,\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) = 0 \quad ,$$

così saranno soddisfatte identicamente tutte le ug. glianze

$$(h,k)^2\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) = 0$$

$$(h,k)^3\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'altra parte il teorema di Taylor ci dà, proseguendo lo sviluppo (6):

$$\varphi(x';y';\ldots;a;b;\ldots) = \varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots)$$

$$+ \frac{\lambda}{\underline{|1}}\cdot(h,k)\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) + \frac{\lambda^2}{\underline{|2}}\cdot(h,k)^2\varphi + \frac{\lambda^3}{\underline{|3}}\cdot(h,k)^3\varphi + \ldots$$

Si conchiude dunque per le (9) e (10) che:

$$\varphi(x';y';\ldots;a;b;\ldots) = \varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) \,,$$

cioè appunto che la (3) è soddisfatta per la trasformazione lineare del tipo (4).

Finalmente il caso in cui i simboli $a, b, c, \ldots$ siano in parte, o tutti, fra loro equivalenti, si riconduce facilmente a quello ora considerato operando sull'eguaglianza (9) col processo di Aronhold (cfr. §° V). In questo modo si sostituirà all'uguaglianza simbolica (9) un'uguaglianza simbolica affatto analoga (cfr. art. 26), nella quale i simboli $a, b, c, \ldots$ rappresenteranno forme fondamentali indipendenti. Da questa si dedurranno poi, come poco fa, delle formole analoghe alle (10). Tutte queste formole ricadranno poi nelle stesse (9) e (10) coi simboli equivalenti appena che le nuove forme fondamentali introdotte si suppongano poi, come è lecito, coincidenti colle primitive ad esse corrispondenti. Le formole (10) sussisteranno dunque, come le (9), anche se, fatte le derivazioni, si presentino in esse simboli equivalenti, cosicchè lo sviluppo (11) ci condurrà alla stessa conclusione di poco fa.

41 – Eseguiamo ora invece sulle $x, y, \ldots$ la sostituzione lineare (di determinante $\varepsilon$):

$$x_1' = x_1, \ldots, x_{h-1}' = x_{h-1}, x_h' = \varepsilon^{-1} x_h, x_{h+1}' = x_{h+1}, \ldots, x_n' = x_n \qquad (12)$$

che trae con sè pei simboli $a, b, c, \ldots$ la sostituzione:

$$a_1' = a_1, \ldots, a_{h-1}' = a_{h-1}, a_h' = a_h, a_{h+1}' = a_{h+1}, \ldots, a_n' = a_n. \qquad (13)$$

Si dovrà avere, secondo la (3), l'uguaglianza:

$$\varphi(x_1,\dots,\frac{x_h}{\varepsilon},\dots,x_n;y_1,\dots,\frac{y_h}{\varepsilon},\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,\varepsilon a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,\varepsilon b_h,\dots,b_n;\dots)$$
$$=\varepsilon^{\tau}\varphi(x_1,\dots,x_h,\dots,x_n;y_1,\dots,y_h,\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,b_h,\dots,b_n;\dots). \quad (14)$$

Di qui segue se, per un termine di $\varphi$ scelto a piacere indichiamo con $p_i$ la differenza fra il numero dei fattori $a_h$, $b_h$, $c_h$, ... (di indice $h$) in esso contenuti e il numero dei suoi fattori (di indice $h$) del tipo $x_h$, $y_h$, ... :

$$\varepsilon^{p_h} = \varepsilon^{\tau}$$

donde $p_h = \tau$.

Pertanto, il numero $p_h$ (che è precisamente quello stesso che nel primo capitolo, §° XV, abbiamo definito come peso del termine di cui si tratta espresso nei coefficienti effettivi di tutte le forme fondamentali) ha lo stesso valore (uguale al peso $\tau$ del covariante $\varphi$) qualunque sia il termine del covariante che si voglia considerare e comunque si scelga l'indice $h$. Ritroviamo così il teorema già incontrato al §° XV del primo capitolo.

42. Questo teorema può essere espresso brevemente così:

$$\left[\Delta_{h,h} - D_{hh}\right]\varphi = \tau\varphi \quad , \qquad h = 1, 2, \dots n \quad . \qquad (15)$$

Infatti, se $T$ è un termine qualunque della forma $\varphi$, è facile vedere che si ha

$$\left[\Delta_{hh} - D_{hh}\right] T = p_h T$$

essendo $p_h$ il numero testè definito per detto termine.

Reciprocamente, se la forma $\varphi$ (che supponiamo omogenea nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale ed in cia-

na serie di variabili) soddisfa alle condizioni:

$$[\Delta_{11} - D_{11}]\varphi = [\Delta_{22} - D_{22}]\varphi = \cdots = [\Delta_{nn} - D_{nn}]\varphi \,, \qquad (16)$$

sterà un numero $\tau$ pel quale sono soddisfatte le (15) nindi anche le (14); cioè $\varphi$ sarà un covariante del si. ma fondamentale $f, f_1, f_2, \ldots$ rispetto alla sostituzione eare (12).

Dopo quanto si è dimostrato, è ora facile di conclude. che: affinchè la forma algebrica $\varphi(x; y; \ldots, a; b; \ldots)$ com ta colle serie di variabili ennarie $x, y, \ldots$ e coi coefficien simbolici $a, b, c, \ldots$ di certe forme fondamentali ennarie $f_1, f_2, \ldots$, sia un covariante del sistema $f, f_1, f_2, \ldots$ è ne. ssario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \cdots = (n,n)\varphi \qquad (I)$$

e condizioni:

$$(i,j)\varphi = 0 \qquad (II)$$

le quali ultime gli indici $i, j$ si possono scegliere a pia. e fra i numeri $1, 2, \ldots, n$, purchè differenti.

Fatti, se sono soddisfatte le condizioni (I) e (II), la ma $\varphi$ sarà un covariante del sistema fondamentale $f_1, f_2, \ldots$ rispetto alle sostituzioni lineari del tipo $S_h^{(2)}$ el tipo $S_{h,k}$ e quindi anche (per quanto si è visto nel recedente) per una sostituzione lineare qualunque; chè è manifesto che se $\varphi$ sia un covariante rispetto erte due sostituzioni $S$ e $T$, sarà essa anche un cova.

riante rispetto alla sostituzione lineare $ST$, loro risultante.

---

## §° XI. *Riduzione del sistema di condizioni differenziali del §° precedente.*

44. Fra le operazioni

$$(i,j) = \Delta_{ij} - D_{ji} \tag{1}$$

dove come nel §° precedente:

$$D_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial}{\partial y_i} + z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \cdots \tag{2}$$

e

$$\Delta_{ij} = a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + c_j \frac{\partial}{\partial c_i} + \cdots , \tag{3}$$

esistono delle relazioni affatto analoghe a quelle del Capitolo I (art. 8) fra le operazioni di polare $D_{xy}$, $D_{xz}$, $D_{yz}$, ... semprechè le $x_1, x_2, \ldots x_n$, $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ siano variabili fra loro indipendenti. E precisamente, se $i, j, h, k$ sono indici fra loro distinti, si hanno le identità operative:

$$\left.\begin{array}{l}
(4)\left\{\begin{array}{l}
(i,j)(h,k)-(h,k)(i,j)=0\\
(i,j)(i,h)-(i,h)(i,j)=0\\
(j,i)(h,i)-(h,i)(j,i)=0\\
(i,i)(h,h)-(h,h)(i,i)=0
\end{array}\right. \quad (5)\left\{\begin{array}{l}
(j,h)(i,j)-(i,j)(j,h)=(i,h)\\
(i,h)(i,i)-(i,i)(i,h)=(i,h)\\
(h,h)(i,h)-(i,h)(h,h)=(i,h)
\end{array}\right.\\
\qquad (i,j)(j,i)-(j,i)(i,j)=(j,j)-(i,i) \qquad (6)
\end{array}\right\} \mathrm{I}$$

Sono queste infatti una facile conseguenza delle relazioni analoghe del capitolo I. Proponiamoci infatti, p. es. di

imostrare la (6). Si ha:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j)=$$

$$(\Delta_{ij}-D_{ji})(\Delta_{ji}-D_{ij})-(\Delta_{ji}-D_{ij})(\Delta_{ij}-D_{ji})$$

quindi, poichè ogni operazione $D$ è evidentemente per-

utabile con ogni operazione $\Delta$:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j)=$$

$$\Delta_{ij}\,\Delta_{ji}-\Delta_{ji}\,\Delta_{ij}+D_{ji}\,D_{ij}-D_{ij}\,D_{ji}\ .$$

Ma per le formole citate del capitolo I, si ha:

$$\Delta_{ij}\,\Delta_{ji}-\Delta_{ji}\,\Delta_{ij}=\Delta_{jj}-\Delta_{ii}$$

$$D_{ji}\,D_{ij}-D_{ij}\,D_{ji}=D_{ii}-D_{jj}\ .$$

uindi appunto:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j)=$$

$$(\Delta_{jj}-D_{jj})-(\Delta_{ii}-D_{ii})=(j,j)-(i,i).$$

i modo affatto analogo si stabiliranno le (4) e (5).

5 - Dalle relazioni (5) si deduce, precisamente come

Capitolo I° (art. 27) che tutte quelle operazioni $(i,j)$

elle quali $i>j$, si possono esprimere colle $n-1$ operazio-

i:

$$(n,n-1),\ (n-1,n-2),\ \ldots\ (3,2),(2,1)$$

similmente tutte quelle operazioni $(i,j)$ in cui $i<j$,

possono esprimere colle $n-1$ operazioni:

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ \ldots\ ,\ (n-1,n).$$

i qui segue che: affinchè una funzione $\varphi$ delle varia-

li indipendenti $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ soddisfi a tutte le

equazioni differenziali

$$(i,j)\varphi = 0$$

in cui $i$ ed $j$ sono due indici qualsivogliano fra loro differenti, è necessario e sufficiente che soddisfi alle $2(n-1)$ condizioni:

$$(1,2)\varphi = 0, \quad (2,3)\varphi = 0, \quad \ldots, \quad (n-1,n)\varphi = 0$$

$$(n,n-1)\varphi = 0, \quad (n-1,n-2)\varphi = 0, \quad \ldots, \quad (2,1)\varphi = 0$$

46. Di queste $2(n-1)$ condizioni, le ultime $(n-1)$ sono però una conseguenza delle prime $(n-1)$ e reciprocamente, se la forma algebrica $\varphi$ soddisfa altresì alle condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \ldots = (n,n)\varphi .$$

Noi dimostreremo infatti facilmente che se la forma algebrica $\varphi$ soddisfa alla condizione:

$$(h,h)\varphi = (k,k)\varphi$$

e ad una delle due condizioni:

$$(h,k)\varphi = 0 \quad , \quad (k,h)\varphi = 0 ,$$

essa soddisfa anche all'altra.

Pertanto potremo concludere che: affinchè una forma algebrica $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; \ldots)$ delle serie ennarie indipendenti $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ soddisfi alle $n^2-1$ equazioni differenziali:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \ldots = (n,n)\varphi$$

$$(i,j)\varphi \doteq 0 \quad \text{per } i \neq j \text{ ed } i,j = 1, 2, \ldots, n$$

necessario e sufficiente che essa soddisfi alle n-1 equa-
ni differenziali

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \cdots (n,n)\varphi$$

lle (n-1) equazioni differenziali

$$(1,2)\varphi = 0\,,\ (2,3)\varphi = 0\,,\ (3,4)\varphi = 0\,,\ \ldots,(n-1,n)\varphi = 0\,.$$

Il lemma presupposto nell'art. prec., che ancora ci re-
a dimostrare, non differisce sostanzialmente dalla se-
ente proposizione più semplice: Se $f(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m ; \eta_1, \eta_2,$
$\eta_m)$ è una forma algebrica soddisfacente alla condizione

$$\mathcal{D}_{\xi\xi} f = \mathcal{D}_{\eta\eta} f \tag{4}$$

d una delle due condizioni:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta} f = 0\,,\quad \mathcal{D}_{\eta\xi} f = 0\,, \tag{5}$$

a soddisfa anche all'altra.

Quest'ultima proposizione è una conseguenza immediata
lo sviluppo per polari (sviluppo di Clebsch e Gordan, cf.
2 del primo capitolo) applicato alla forma $f$ contenente
due serie $m^{\text{arie}}$ $\xi$ ed $\eta$. Infatti la condizione (4) ci dice che
dello stesso ordine nelle $\xi$ e nelle $\eta$. Se ora si applica
sviluppo di Clebsch e Gordan alla forma

$$f(\xi;\eta) = \alpha_\xi^\mu \beta_\eta^\mu\,.$$

ll'ipotesi che sia per es. $\mathcal{D}_{\xi\eta} f = 0$ questo sviluppo si ri-
rà evidentemente al suo ultimo termine, cioè si avrà,
meno di un coefficiente numerico:

$$f(\xi,\eta)=(\alpha_\xi\,\beta_\eta)^\mu$$

d'onde segue appunto che è anche soddisfatta l'equazione $\mathcal{D}_{\eta\xi}f=0$, giacchè: $\mathcal{D}_{\eta\xi}(\alpha_\xi\,\beta_\eta)=0$.

48. Per dedurre da questa ultima proposizione il lemma dell'art. 46 basta prendere per $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ le variabili $a_i, b_i, \ldots, x_j, y_j, \ldots$ e per $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ le variabili $-a_j, -b_j, \ldots x_i, y_i, \ldots$. Infatti se si scrive, in virtù di queste sostituzioni:

$$f(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_m;\eta_1,\eta_2,\ldots\eta_m)=\varphi(a_i,b_i,\ldots,x_j,y_j,\ldots;a_j,b_j,\ldots x_i,y_i,\ldots);$$

si riconosce immediatamente che:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta}f=-\Delta_{ij}\varphi+\mathcal{D}_{ji}\varphi=-(i,j)\varphi$$
$$\mathcal{D}_{\eta\xi}f=-\Delta_{ji}\varphi+\mathcal{D}_{ij}\varphi=-(j,i)\varphi$$
$$\mathcal{D}_{\xi\xi}f=\Delta_{ii}\varphi+\mathcal{D}_{jj}\varphi$$
$$\mathcal{D}_{\eta\eta}f=\Delta_{jj}\varphi+\mathcal{D}_{ii}\varphi$$

cosicchè l'eguaglianza (4) prende le forme:

$$\Delta_{ii}\varphi+\mathcal{D}_{jj}\varphi=\Delta_{jj}\varphi+\mathcal{D}_{ii}\varphi$$

cioè

$$(i,i)\varphi=(j,j)\varphi; \qquad (4$$

e le condizioni (5) prendono rispettivamente la forma:

$$(i,j)\varphi=0 \quad , \quad (j,i)\varphi=0 \qquad (5$$

La posizione dell'art. 54 viene così ad essere perfettamente equivalente al lemma dell'art. 46; c.d.d.

49. Dopo quanto si è dimostrato è facile di concludere che: *affinchè una forza algebrica* $\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots)$

mposta con certe serie di variabili ennarie $x, y, \ldots$ e coi
imboli $a, b, \ldots$ di certe forme fondamentali $f, f_1, \ldots$ sia
n covariante del sistema $f, f_1, \ldots$, è necessario e sufficien
che siano soddisfatte le condizioni differenziali

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \cdots\cdots = (n,n)\varphi \qquad (A)$$

!

$$(1,2)\varphi = 0,\ (2,3)\varphi = 0,\ (3,4)\varphi = 0, \ldots, (n-1,n)\varphi = 0 \qquad (B)$$

Abbiamo già veduto nel §° prec. (art. 43) che queste con
zioni sono necessarie. D'altra parte, se esse sono sod
sfatte, segue dalle ultime dimostrazioni che sono sod
sfatte tutte le condizioni

$$(i,j)\varphi = 0$$

e $j \neq i$ e quindi (art. 43) che $\varphi$ è un covariante del si
ema $f, f_1, \ldots$

ramente nelle ultime dimostrazioni si è supposto
e i simboli $a, b, \ldots$ potessero anche riguardarsi co
e serie di parametri aventi valori effettivi fra loro
fatto indipendenti, il che equivale a supporre (cfr.
t. 40) che fra i simboli $a, b, c, \ldots$ non ve ne siano
equivalenti, cioè che $\varphi$ sia di 1° grado nei coeffi
enti di ciascuna forma fondamentale. Si può però
cilmente riconoscere, precisamente come all'artic.
, che il teorema vale incondizionatamente, riconducen
o il caso d'un covariante $\varphi$ qualunque al caso di un

covariante lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale coll'applicare preventivamente a $\varphi$ una o più volte di seguito, il processo di Aronhold.

50. E' appena necessario di aggiungere che il sistema delle condizioni (A) e (B) equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \cdots = (n,n)\varphi \\ (2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ (4,3)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n-1)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

o, più generalmente, al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = 0,\ (2,2)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n)\varphi = 0 \\ (h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ (h_3,h_4)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

essendo $h_1, h_2, \ldots h_n$ una permutazione, scelta a piacere, degl'indici $1, 2, 3, \ldots n$.(*)

---

(*) La riduzione delle equazioni differenziali al minimo numero si può anche fare sostituendo alle $n-1$ equazioni del tipo:

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0$$

$n-1$ equazioni del tipo

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_1,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_1,h_n)\varphi = 0.$$

Cfr. a tale oggetto il §° 8° dei già citati: *Fondamenti*. Per la storia dei lavori di Aronhold, Clebsch, ecc. concernenti le equazioni differenziali e la loro riduzione, si vegga il già citato Rapporto del Meyer.

# XIV. Le equazioni differenziali dei covarianti espresse coi coefficienti effettivi delle forme fondamentali.

Consideriamo, per semplicità, il caso di un'unica forma fondamentale emaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \qquad (1)$$

in un'unica serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; giacchè le cose che diremo si estendono poi immediatamente al caso generale. Sia $\varphi(a;b;\dots;x;y;\dots z)$ un covariante qualunque di $f$, il quale possa contenere una o più serie di variabili $x, y, \dots, z$ cogredienti alla serie $x$. Le condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \qquad (2)$$

che deve soddisfare il covariante $\varphi$, altro non dicono, come si è già visto (art. 49) se non che essere $\varphi$ isobarica nei suoi termini ed essere in ogni termine di $\varphi$ il 1° peso, eguale al 2° peso, eguale al 3° peso etc. potendosi ogni peso definire (cfr. Cap. I° art. 75) in base alla rappresentazione di $\varphi$ coi coefficienti effettivi di $f$.

Passiamo ora a vedere come anche ogni equazione differenziale simbolica:

$$(i,j) = 0 \qquad (3)$$

è:

$$a_j \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} + \dots = x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \dots + z_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \qquad (3)'$$

si traduca in un'equazione differenziale equivalente cui deve soddisfare $\varphi$ espressa coi coefficienti effettivi di $f$.

52. Sia

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2 \dots \lfloor\alpha_n} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)'$$

l'espressione effettiva di $f$, coi coefficienti preparati $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$. Poichè (Cap. I, art. 45):

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n} = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n} = \dots, \qquad (4)$$

se un certo coefficiente $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ è stato espresso coi simboli $a$, si ha

$$\left(a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + \dots\right) A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_j \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}{\partial a_i}$$

$$= \alpha_i \cdot a_1^{\alpha_1} \dots a_i^{\alpha_i-1} \dots a_j^{\alpha_j+1} \dots a_n^{\alpha_n} = \alpha_i A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n}.$$

Quindi:

$$a_j \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial\varphi}{\partial b_i} + \dots =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \alpha_i \cdot A_{\alpha_1,\dots\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n} \frac{\partial\varphi}{\partial A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n}} \qquad (5)$$

La condizione (3)' è così tradotta in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare $\varphi$ considerata come funzione delle variabili arbitrarie effettive:

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}, \alpha, y \dots$$

53. Supponiamo, per es., che la forma fondamentale $f$ sia

una forma binaria:

$$f = A_{m,0}x_1^m + \binom{m}{1}A_{m-1,1}x_1^{m-1}x_2 + \binom{m}{2}A_{m-2,2}x_1^{m-2}x_2^2 + \dots + A_{0,m}x_2^m \qquad (6)$$

e $\varphi$ un suo covariante contenente le serie di variabili $x$, $y$, $z$.

La condizione differenziale:

$$(1,2)\varphi = 0 \qquad (7)$$

si tradurrà nella seguente:

$$m \cdot A_{m-1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m,0}} + (m-1)A_{m-2,2}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-1,1}} + (m-2)A_{m-3,3}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-2,2}} +$$

$$+ \dots\dots + 1 \cdot A_{0,m}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{1,m-1}} = x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + z_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \qquad (7)'$$

Invece la condizione:

$$(2,1)\varphi = 0 \qquad (8)$$

si tradurrà in:

$$A_{m,0}\frac{\partial\varphi}{A_{m-1,1}} + 2A_{m-1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-2,2}} + 3A_{m-2,2}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-3,3}} +$$

$$+ \dots + mA_{1,m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{0,m}} = x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} \qquad (8)'$$

54. La forma binaria di ordine $m$ si rappresenta ordinariamente colla notazione più semplice:

$$f = p_0x_1^m + \binom{m}{1}p_1x_1^{m-1}x_2 + \binom{m}{2}p_2x_1^{m-2}x_2^2 + \dots + p_mx_2^m,$$

sicchè anche le condizioni (7)' ed (8') assumono la notazione più semplice:

$$(7)'' \quad mp_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_0} + (m-1)p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + (m-2)p_3\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \dots + p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m-1}} = x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dots$$

e

$$p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + 2p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + 3p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \dots + m p_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots \qquad (8)''$$

La condizione:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi$$

viene poi a dire che nei varî termini di $\varphi$ dev'essere costante la differenza fra la somma degl'indici delle $p$ e il grado nelle $x_2, y_2, z_2, \dots$ e che questa differenza (peso del covariante) deve essere uguale ad $\frac{mg-\gamma}{2}$, $g$ essendo il grado di $\varphi$ nei coefficienti $p_0, p_1, \dots, p_m$ e $\gamma$ il grado complessivo nelle variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, \dots$ in esso contenute. Ciò si riconosce facilmente, osservando che la forma $\varphi$ si ritiene omogenea nei coefficienti $p_0, p_1, \dots p_m$ e così pure omogenea rispetto a ciascuna delle serie di variabili $x, y, \dots$.

---

## §° XIII. *Rappresentazione simbolica caratteristica dei covarianti e dei semi-covarianti.*

55. Ci proponiamo ora di dimostrare (cfr. art. 31) che se $\varphi$ è un covariante di un certo sistema di forme fondamentali ennarie, il quale possa anche contenere certe serie cogredienti di variabili $x, y, \dots z$, esso si può sempre rappresentare come un aggregato razionale intero di forme lineari simboliche, come $a_x$, $b_x$, $a_y$, ... di parentesi ennarie simboliche, come $(a\ b\ c \dots e)$, e di parentesi ennarie di

variabili come $(x\ y \dots z)$; essendo $a, b, c, \dots$ simboli, che possono anche in parte od in tutto essere equivalenti, delle forme fondamentali.

Per dimostrare ciò, ci serviremo delle condizioni differenziali:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \qquad \text{(I)}$$

e

$$(2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ \dots,\ (n,n-1)\varphi = 0 \qquad \text{(II)}$$

che caratterizzano, come si è visto (§ XI), i covarianti. Noi daremo però alla dimostrazione un andamento tale (*) da poter servire a dare al tempo stesso la rappresentazione caratteristica di quelle forme algebriche $\varphi$ alle quali s'impongano soltanto le condizioni differenziali (II), che chiamiamo *semi-covarianti* (o *semi-invarianti*, se non contengono serie di variabili $x, y, \dots$)

56. Supporremo dapprima (giacchè il caso generale si riconduce facilmente a questo mediante il processo di Aronhold, che le forme fondamentali siano tutte *lineari* nei coefficienti delle forme fondamentali; cosicchè potremo considerare il semi-covariante $\varphi(a; b; c; \dots; x; y; \dots$, come una funzione di variabili effettive $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2 \dots, b_n, \dots$,

(*) Cfr. Dienych: Essai d'une théorie ecc. pag. 55 e segg.

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tutte fra loro indipendenti, soddisfacente identicamente alle equazioni alle derivate parziali rappresentate dalle condizioni (II).

Ciò premesso, noi dimostreremo che ogni semi-covariante $\varphi$ è un aggregato razionale intero:

1°) di elementi lineari del tipo:

$$a_x\,,\ b_x\,,\ a_y\,,\ \ldots$$

2°) di determinanti degli $n$ tipi:

$$d_1 \equiv a_1\,,\ d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\ d_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ldots,\ d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

3°) di determinanti degli $n$ tipi:

$$\delta_{n-1} \equiv x_n\,,\ \delta_{n-2} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix},\ \delta_{n-3} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}, \ldots,\ \delta_0 \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \ldots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & \ldots & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

57. Ci è lecito supporre, senza nulla togliere alla generalità della questione, che i termini di $\varphi$ siano tutti dello stesso peso $\tau_1$ rispetto all'indice 1, dello stesso peso $\tau_2$ rispetto all'indice 2, e così via, definendosi in generale come peso $i^{\text{esimo}}$ di un prodotto di $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots\ldots$ (cfr. §°X) la differenza fra il numero dei fattori $a_i$, $b_i$, ... e il numero dei fattori $x_i, y_i, \ldots$

A queste condizioni soddisfa evidentemente un prodotto qualunque di elementi dei tre tipi testè menzionati. E precisamente, se $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n, \bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_{n-1}$ indichino rispettivamente quanti fattori del tipo $d_1, d_2, \ldots, d_n, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ si trovano contenuti nel prodotto, i pesi $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ del prodotto stesso sono dati, come facilmente si riconosce, da:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 \\
\tau_2 &= \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 \\
\tau_3 &= \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_n &= \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 - \ldots - \bar{\delta}_{n-1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

d'onde segue

$$
\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 &= \bar{d}_1 + \bar{\delta}_1 \\
\tau_2 - \tau_3 &= \bar{d}_2 + \bar{\delta}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\tau_{n-1} - \tau_n &= \bar{d}_{n-1} + \bar{\delta}_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

58. Noi dimostreremo quanto si è enunciato col procedimento dell'induzione matematica, supponendo il teorema dello art. 56 già stabilito per quei semi-covarianti che contengono, complessivamente, un certo numero $\rho$, o un numero inferiore, di serie di coefficienti e di variabili, e deducendone che esso vale anche per ogni covariante $\varphi$ che contenga un numero complessivo $\rho+1$ di serie di coefficienti e di variabili.

covariante lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale coll'applicare preventivamente a $\varphi$ una o più volte di seguito, il processo di Aronhold.

50. E' appena necessario di aggiungere che il sistema delle condizioni (A) e (B) equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \cdots = (n,n)\varphi \\ (2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ (4,3)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n-1)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

o, più generalmente, al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = 0,\ (2,2)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n)\varphi = 0 \\ (h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ (h_3,h_4)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

essendo $h_1, h_2, \ldots h_n$ una permutazione, scelta a piacere, degl'indici $1, 2, 3, \ldots n$.(*)

---

(*) La riduzione delle equazioni differenziali al minimo numero si può anche fare sostituendo alle $n-1$ equazioni del tipo:

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0$$

$n-1$ equazioni del tipo

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_1,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_1,h_n)\varphi = 0.$$

Cfr. a tale oggetto il §° 8° dei già citati: *Fondamenti*. Per la storia dei lavori di Aronhold, Clebsch, ecc. concernenti le equazioni differenziali e la loro riduzione, si vegga il già citato Rapporto del Meyer.

# XIV. Le equazioni differenziali dei covarianti espresse coi coefficienti effettivi delle forme fondamentali.

Consideriamo, per semplicità, il caso di un'unica forma fondamentale emaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \qquad (1)$$

in un'unica serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; giacchè le cose che diremo si estendono poi immediatamente al caso generale. Sia $\varphi(a;b;\dots;x;y;\dots z)$ un covariante qualunque di $f$, il quale possa contenere una o più serie di variabili $x, y, \dots, z$ cogredienti alla serie $x$. Le condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \qquad (2)$$

si deve soddisfare il covariante $\varphi$, altro non dicono, come si è già visto (art. 49) se non che essere $\varphi$ isobarica nei suoi termini ed essere in ogni termine di $\varphi$ il 1° peso, eguale al 2° peso, eguale al 3° peso etc. potendosi ogni peso definire (cfr. Cap. I° art. 75) in base alla rappresentazione di $\varphi$ coi coefficienti effettivi di $f$.

Vediamo ora a vedere come anche ogni equazione differenziale simbolica:

$$(i,j) = 0 \qquad (3)$$

cioè:

$$a_j \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} + \dots = x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \dots + z_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \qquad (3)'$$

covariante lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale coll'applicare preventivamente a $\varphi$ una o più volte di seguito, il processo di Aronhold.

50. E' appena necessario di aggiungere che il sistema delle condizioni (A) e (B) equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \cdots = (n,n)\varphi \\ (2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ (4,3)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n-1)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

o, più generalmente, al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = 0,\ (2,2)\varphi = 0,\ \ldots,(n,n)\varphi = 0 \\ (h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ (h_3,h_4)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

essendo $h_1, h_2, \ldots h_n$ una permutazione, scelta a piacere, degl'indici $1, 2, 3, \ldots n$.(*)

---

(*) La riduzione delle equazioni differenziali al minimo numero si può anche fare sostituendo alle $n-1$ equazioni del tipo:

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_{n-1},h_n)\varphi = 0$$

$n-1$ equazioni del tipo

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_1,h_3)\varphi = 0,\ \ldots,(h_1,h_n)\varphi = 0.$$

Cfr. a tale oggetto il §° 8° dei già citati: *Fondamenti*. Per la storia dei lavori di Aronhold, Clebsch, ecc. concernenti le equazioni differenziali e la loro riduzione, si vegga il già citato *Rapporto* del Meyer.

# XIV. Le equazioni differenziali dei covarianti espresse coi coefficienti effettivi delle forme fondamentali.

Consideriamo, per semplicità, il caso di un'unica forma fondamentale emaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \qquad (1)$$

in un'unica serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; giacchè le cose che diremo si estendono poi immediatamente al caso generale. Sia $\varphi(a;b;\dots;x;y;\dots z)$ un covariante qualunque di $f$, il quale possa contenere una o più serie di variabili $x, y, \dots, z$ cogredienti alla serie $x$. Le condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \qquad (2)$$

si deve soddisfare il covariante $\varphi$, altro non dicono, come si è già visto (art. 49) se non che essere $\varphi$ isobarica nei suoi termini ed essere in ogni termine di $\varphi$ il 1° peso, eguale al 2° peso, eguale al 3° peso etc. potendosi ogni peso definire (cfr. Cap. I° art. 15) in base alla rappresentazione di $\varphi$ coi coefficienti effettivi di $f$.

Passiamo ora a vedere come anche ogni equazione differenziale simbolica:

$$(i,j) = 0 \qquad (3)$$

sia:

$$a_j \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} + \dots = x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \dots + z_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \qquad (3)'$$

si traduca in un'equazione differenziale equivalente cui deve soddisfare $\varphi$ espressa coi coefficienti effettivi di $f$.

52. Sia

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1)'$$

l'espressione effettiva di $f$, coi coefficienti preparati $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$. Poichè (Cap. I, art. 45):

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n} = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n} = \dots, \quad (4)$$

se un certo coefficiente $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ è stato espresso coi simboli $a$, si ha

$$\left(a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + \dots\right) A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_j \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}{\partial a_i}$$

$$= \alpha_i \cdot a_1^{\alpha_1} \dots a_i^{\alpha_i-1} \dots a_j^{\alpha_j+1} \dots a_n^{\alpha_n} = \alpha_i A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n}.$$

Quindi:

$$a_j \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} + \dots =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \alpha_i \cdot A_{\alpha_1,\dots\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n}} \quad (5)$$

La condizione (3)' è così tradotta in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare $\varphi$ considerata come funzione delle variabili arbitrarie effettive:

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}, x, y \dots$$

53. Supponiamo, per es., che la forma fondamentale $f$ sia

una forma binaria:

$$f = A_{m,0}x_1^m + \binom{m}{1}A_{m-1,1}x_1^{m-1}x_2 + \binom{m}{2}A_{m-2,2}x_1^{m-2}x_2^2 + \dots + A_{0,m}x_2^m \qquad (6)$$

e $\varphi$ un suo covariante contenente le serie di variabili $x$, $y$, $z$.

La condizione differenziale:

$$(1,2)\varphi = 0 \qquad (7)$$

si tradurrà nella seguente:

$$m \cdot A_{m-1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m,0}} + (m-1)A_{m-2,2}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-1,1}} + (m-2)A_{m-3,3}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-2,2}} +$$

$$+ \dots\dots + 1 \cdot A_{0,m}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{1,m-1}} = x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + z_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \qquad (7)'$$

Invece la condizione:

$$(2,1)\varphi = 0 \qquad (8)$$

si tradurrà in:

$$A_{m,0}\frac{\partial\varphi}{A_{m-1,1}} + 2A_{m-1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-2,2}} + 3A_{m-2,2}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{m-3,3}} +$$

$$+ \dots + mA_{1,m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial A_{0,m}} = x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} \qquad (8)'$$

54. La forma binaria di ordine $m$ si rappresenta ordinariamente colla notazione più semplice:

$$f = p_0x_1^m + \binom{m}{1}p_1x_1^{m-1}x_2 + \binom{m}{2}p_2x_1^{m-2}x_2^2 + \dots + p_mx_2^m,$$

sicchè anche le condizioni (7)' ed (8') assumono la notazione più semplice:

$$(7)'' \quad mp_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_0} + (m-1)p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + (m-2)p_3\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \dots + p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m-1}} = x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dots$$

e

$$p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + 2p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + 3p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \dots + m p_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots \qquad (8)''$$

La condizione:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi$$

viene poi a dire che nei varî termini di $\varphi$ dev'essere costante la differenza fra la somma degl'indici delle $p$ e il grado nelle $x_2, y_2, z_2, \dots$ e che questa differenza (peso del covariante) deve essere uguale ad $\frac{mg-\gamma}{2}$, $g$ essendo il grado di $\varphi$ nei coefficienti $p_0, p_1, \dots, p_m$ e $\gamma$ il grado complessivo nelle variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, \dots$ in esso contenute. Ciò si riconosce facilmente, osservando che la forma $\varphi$ si ritiene omogenea nei coefficienti $p_0, p_1, \dots p_m$ e così pure omogenea rispetto a ciascuna delle serie di variabili $x, y, \dots$.

---

## §° XIII. *Rappresentazione simbolica caratteristica dei covarianti e dei semi-covarianti.*

55. Ci proponiamo ora di dimostrare (cfr. art. 31) che se $\varphi$ è un covariante di un certo sistema di forme fondamentali ennarie, il quale possa anche contenere certe serie cogredienti di variabili $x, y, \dots z$, esso si può sempre rappresentare come un aggregato razionale intero di forme lineari simboliche, come $a_x$, $b_x$, $a_y$, ... di parentesi ennarie simboliche, come $(a\ b\ c \dots e)$, e di parentesi ennarie di

variabili, come $(x\ y\ \ldots z)$; essendo $a, b, c, \ldots$ simboli, che possono anche in parte od in tutto essere equivalenti, delle forme fondamentali.

Per dimostrare ciò, ci serviremo delle condizioni differenziali:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \cdots = (n,n)\varphi \qquad \text{(I)}$$

e

$$(2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ \ldots,\ (n,n-1)\varphi = 0 \qquad \text{(II)}$$

che caratterizzano, come si è visto (§° XI), i covarianti. Noi daremo però alla dimostrazione un andamento tale(*) da poter servire a dare al tempo stesso la rappresentazione caratteristica di quelle forme algebriche $\varphi$ alle quali s'impongano soltanto le condizioni differenziali (II), che chiamiamo *semi-covarianti* (o *semi-invarianti*, se non contengono serie di variabili $x, y, \ldots$)

56. Supporremo dapprima (giacchè il caso generale si riconduce facilmente a questo mediante il processo di Aronhold, che le forme fondamentali siano tutte *lineari* nei coefficienti delle forme fondamentali; cosicchè potremo considerare il semi-covariante $\varphi(a; b; c; \ldots; x; y; \ldots$, come una funzione di variabili *effettive* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots, b_n, \ldots,$

---

(*) Cfr. Dernyts: Essai d'une théorie ecc. pag. 55 e segg.

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tutte fra loro indipendenti, soddisfacente identicamente alle equazioni alle derivate parziali rappresentate dalle condizioni (II).

Ciò premesso, noi dimostreremo che ogni semi-covariante $\varphi$ è un aggregato razionale intero:

1°) di elementi lineari del tipo:

$$a_x\,,\ b_x\,,\ a_y\,,\ \ldots$$

2°) di determinanti degli $n$ tipi:

$$d_1 \equiv a_1\,,\ d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\ d_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ldots,\ d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

3°) di determinanti degli $n$ tipi:

$$\delta_{n-1} \equiv x_n\,,\ \delta_{n-2} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix},\ \delta_{n-3} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}, \ldots,\ \delta_0 \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \ldots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & \ldots & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

57. Ci è lecito supporre, senza nulla togliere alla generalità della questione, che i termini di $\varphi$ siano tutti dello stesso peso $\tau_1$ rispetto all'indice 1, dello stesso peso $\tau_2$ rispetto all'indice 2, e così via, definendosi in generale come peso $i^{\text{esimo}}$ di un prodotto di $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots\ldots$ (cfr. §°X) la differenza fra il numero dei fattori $a_i$, $b_i$, ... e il numero dei fattori $x_i, y_i, \ldots$.

A queste condizioni soddisfa evidentemente un prodotto qualunque di elementi dei tre tipi testè menzionati. E precisamente, se $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n, \bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_{n-1}$ indichino rispettivamente quanti fattori del tipo $d_1, d_2, \ldots, d_n, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ si trovano contenuti nel prodotto, i pesi $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ del prodotto stesso sono dati, come facilmente si riconosce, da:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 \\
\tau_2 &= \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 \\
\tau_3 &= \bar{d}_3 + \ldots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_n &= \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 - \ldots - \bar{\delta}_{n-1},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

d'onde segue

$$
\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 &= \bar{d}_1 + \bar{\delta}_1 \\
\tau_2 - \tau_3 &= \bar{d}_2 + \bar{\delta}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\tau_{n-1} - \tau_n &= \bar{d}_{n-1} + \bar{\delta}_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

58. Noi dimostreremo quanto si è enunciato col procedimento dell'induzione matematica, supponendo il teorema dello art. 56 già stabilito per quei semi-covarianti che contengono, complessivamente, un certo numero $\rho$, o un numero inferiore, di serie di coefficienti e di variabili, e deducendone che esso vale anche per ogni covariante $\varphi$ che contenga un numero complessivo $\rho+1$ di serie di coefficienti e di variabili.

Cominciamo dall'osservare che se:

$$(3) \qquad \varphi = a_r \Phi_r + a_{r-1} \Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_1$$

è un siffatto semi-covariante ordinato secondo i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ di una delle serie di coefficienti in esso contenute (se non ne contenesse alcuna, lo si ordinerebbe invece secondo una delle serie di variabili) anche $\Phi_r$ è un semi-covariante.

Esprimendo infatti che $\varphi$ soddisfa all'equazione alle derivate parziali $(i+1, i)\varphi = 0$, si ottiene:

$$a_{r-1} \Phi_r + a_{r-2} \Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_2$$
$$+ a_r \cdot \left[(i+1, i)\Phi_r\right] + a_{r-1} \cdot \left[(i+1, i)\Phi_{r-1}\right] + \cdots + a_1 \left[(i+1, i)\Phi_1\right] = 0,$$

e questa identità, uguagliando a zero il coefficiente di $a_r$ ci dà:

$$(i+1, i)\,\Phi_r = 0 \quad ;$$

cioè anche $\overline{\Phi}_r$ soddisfa al sistema (II).

59. Poichè ora $\overline{\Phi}_r$ contiene una serie di coefficienti di meno di $\varphi$, si potrà ritenere che esso sia della forma:

$$\Phi_r = \sum P \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{r-1} \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_r \\ y_n & y_{n-1} & \cdots & y_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_n & z_{n-1} & \cdots & z_r \end{vmatrix} \qquad (4)$$

cioè si potrà anche ritenere che ogni prodotto di determinanti tipici dell'art. 56, che sia termine di $\overline{\Phi}_r$ contenga almeno un determinante del tipo $d_{r-1}$, ovvero almeno un

determinante del tipo $\delta_{r-1}$. Detti infatti $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r$ i pesi di $\Phi_r$ rispetto agl'indici $r-1$ ed $r$, e $\bar{d}_{r-1}$, $\bar{\delta}_{r-1}$ i numeri di volte che nel prodotto considerato entrano fattori del tipo $\bar{d}_{r-1}$ o $\bar{\delta}_{r-1}$ rispettivamente, si dovrà avere, come si è già dimostrato:

$$\tau'_{r-1} - \tau'_r = \bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1}. \qquad (5)$$

Intanto, essendo $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r$ i pesi di $\Phi_r$, quelli di $\varphi$ sono per la (3) evidentemente $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r + 1$; onde dev'essere anche:

$$\tau'_{r-1} - (\tau'_r + 1) \geqq 0.$$

Sarà dunque per la (5):

$$\bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1} \geqq 1;$$

cioè appunto almeno uno dei due numeri $\bar{d}_{r-1}$ $\bar{\delta}_{r-1}$ sarà superiore a zero.

60 – In conseguenza delle (4), se poniamo per brevità

$$\psi = \sum (-1)^{r-1} P \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{r-1} & l_r \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_{r+1} & a_x \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_{r+1} & a_y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z_{n-1} & \dots & z_{r+1} & a_z \end{vmatrix}$$

si ha:

$$a_r \Phi_r = \psi + \varphi_1,$$

dove $\varphi_1$ conterrà soltanto i coefficienti $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots$; e sostituendo ciò in (3):

$$\varphi = \psi + a_{r-1} \Phi'_{r-1} + a_{r-2} \Phi'_{r-2} + \dots + a_1 \Phi'_1. \qquad (6)$$

Poichè ora le $P$ e $Q$ altro non sono, per supposto, che prodotti di elementi dei tipi indicati all'art. 56, la forma $\psi$

è evidentemente un semi-covariante che già si trova posto sotto la forma caratteristica desiderata; cosicchè ci basterà dimostrare ancora che il semi-covariante $\varphi - \psi$ cioè:

$$a_{r-1}\Phi'_{r-1} + a_{r-2}\Phi'_{r-2} + \cdots + a_1\Phi'_1$$

si può anch'esso rappresentare sotto la stessa forma caratteristica. Ma ragionando su $\varphi - \psi$ come si è fatto su $\varphi$ si potrà scrivere:

$$\varphi - \psi = \psi' + a_{r-2}\Phi''_{r-2} + a_{r-3}\Phi''_{r-3} + \cdots + a_1\Phi''_1$$

essendo $\psi'$ un semi-covariante già ridotto alla forma caratteristica; e così procedendo si concluderà evidentemente:

$$\varphi = \psi + \psi' + \psi'' + \cdots,$$

cioè si avrà l'intero $\varphi$ rappresentato come una somma di semi-covarianti, ciascuno dei quali è ridotto alla forma caratteristica. E pertanto anche $\varphi$ si troverà espresso come un aggregato razionale intero di elementi appartenenti ai tipi caratteristici definiti all'art. 56; c.d.d.

61 - Se il semi-covariante $\varphi$ non è lineare nei coefficienti del sistema di forme fondamentali $f, f_1, f_2, \ldots$ cui si riferisce, si applicherà dapprima ad esso il processo di Aronhold in modo da trasformarlo (cfr. IV) in un semi-covariante $\bar{\varphi}$ del sistema fondamentale

. . . . . .

(ottenuto aggiungendo alle forme $f, f_1, \ldots$ altre nuove forme ad esse simili $F, \ldots, F_1, \ldots$ tutte fra loro indipendenti) lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale. Il semi-covariante $\bar{\varphi}$ si potrà anche evidentemente considerare come un semi-covariante del sistema di forme fondamentali lineari:

$$a_x \ , \quad \alpha_x \ , \ \ldots \ldots$$
$$b_x \ , \quad \beta_x \ , \ \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots$$

e quindi, mediante una nuova applicazione del processo di Aronhold, trasformare in un semi-covariante $\bar{\bar{\varphi}}$ di un sistema di forme lineari indipendenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_x, a'_x, \ldots, a_x^{(m-1)} ; \alpha_x, \alpha'_x, \ldots, \alpha_x^{(m-1)} ; \ldots \ldots \\ b_x, b'_x, \ldots, b_x^{(\mu-1)} ; \beta_x, \beta'_x, \ldots, \beta_x^{(\mu-1)} ; \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}\right\} (8)$$

lineare nei coefficienti di ciascuna di esse. Per quanto si è concluso all'art. 60, il semi-covariante $\bar{\bar{\varphi}}$ si potrà rappresentare come un aggregato razionale intero degli elementi (8), di determinanti dei tipi $\delta_0$, $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, e di determinanti dei tipi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ composti coi varî simboli:

$$a\,,\ a'\,,\ \ldots\,,\ a^{(m-1)}\,;\ \alpha\,,\ \alpha'\,,\ \ldots\,,\ \alpha^{(m-1)}\,;\ \ldots$$

$$b\,,\ b'\,,\ \ldots\,,\ b^{(\mu-1)}\,;\ \beta\,,\ \beta'\,,\ \ldots\,,\ \beta^{(\mu-1)}\,;\ \ldots$$

. . . . . .

Ma per ritornare da $\bar{\bar{\varphi}}$ a $\varphi$, basta evidentemente di re:

$$a' = a'' = \cdots = a^{(m-1)} = a\,,\quad \alpha' = \alpha'' = \cdots = \alpha^{(m-1)} = \alpha$$

$$b' = b'' = \cdots = b^{(\mu-1)} = b\,,\quad \beta' = \beta'' = \cdots = \beta^{(\mu-1)} = \beta$$

. . . . . .

e di considerare come equivalenti i simboli $a$, $\alpha$, . e così pure come equivalenti fra loro i simboli $\beta$, . . . ; ecc.

Resta così dimostrato che: Se $\varphi$ è un semi-covarian di un sistema di forme fondamentali i cui simboli ( possono anche essere in tutto od in parte fra loro e valenti) siano $a$, $b$, $c$, . . . , e le $x$, $y$, $z$, . . . siano le se di variabili contenute in $\varphi$, esso si può rappresen re come un aggregato razionale intero di elemen dei tipi

$$a_x\,,\ b_x\quad a_y\,,\ \ldots\ldots$$

$$a_1\,,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\,,\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,,\ \ldots$$

$$x_n\,,\ \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix}\,,\qquad \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}\,,\ \ldots\,,$$

62 - Se $\varphi$ è un covariante dev'essere inoltre soddisfatta la condizione:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_n ,$$

cosicchè le formole (2) ci dànno evidentemente:

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \dots = \bar{d}_{n-1} = 0$$

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \dots = \bar{\delta}_{n-1} = 0 .$$

Pertanto: *ogni covariante di un sistema di forme fondamentali ennarie i cui simboli (equivalenti o non equivalenti) siano $a, b, c, \dots$, il quale contenga le serie di variabili $x, y, z, \dots$, si può rappresentare come un aggregato razionale intero di elementi lineari $a_x, a_y, b_x, \dots$ e di parentesi ennarie dei due tipi*

$$(a\ b \dots c) \quad \text{ed} \quad (x\ y \dots z) .$$

---

## §° XIV. *Formole di riduzione.*

63 - La rappresentazione dei covarianti sotto la forma simbolica caratteristica si può in generale effettuare in molti differenti modi a causa delle relazioni identiche che intercedono fra gli elementi dei varii tipi caratteristici:

$$a_x , a_y , \dots , (a\ b \dots c), (x\ y \dots z), \dots$$

Queste relazioni dànno luogo a delle formole, così det-

te di *riduzione*, mediante l'uso delle quali si può pas
re da una data espressione simbolica alle altre espres
ni ad essa equivalenti. Queste formole sono dunque in
spensabili nella tecnica della calcolazione simbolica d
le forme invariantive.

Noi ci porremo, per fissare le idee, nel campo terna
e considereremo quindi delle serie ternarie di variabi
$x_1, x_2, x_3$ ; $y_1, y_2, y_3$ e delle serie ternarie di coefficien
simboli) o variabili controgredienti : $a_1, a_2, a_3$ ; $b_1, b_2, b$
$u_1, u_2, u_3$ ; $v_1, v_2, v_3$ ; . . . . mediante le quali potremo co
re in molti svariati modi degli elementi caratteristi
varii tipi :

$$a_x, a_y, \ldots, (x, y, z), (a, b, c), \ldots (a\, b\, u), \ldots, (u\, v\, w,$$

64 - Si ha primieramente per la regola del prodotto
determinanti :

$$(x\ y\ z)(a\ b\ c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

o più brevemente :

$$(x\ y\ z)(a\ b\ c) = (a_x\ b_y\ c_z)$$

Si ha poi identicamente nel campo ternario (cfr. Cap. I

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & a_t \\ b_x & b_y & b_z & b_t \\ c_x & c_y & c_z & c_t \\ d_x & d_y & d_z & d_t \end{vmatrix} = 0$$

Le altre formole di riduzione non sono che uno svolgimento delle formole fondamentali (I) e (II).

65. Sviluppando il determinante (II) secondo gli elementi della prima verticale, viene:

$$(b_y\, c_z\, d_t)\, a_x - (a_y\, c_z\, d_t)\, b_x + (a_y\, b_z\, d_t)\, c_x - (a_y\, b_z\, c_t)\, d_x = 0$$

e dividendo pel fattore $(x\, y\, z)$ che si può isolare in ogni termine mediante la (I):

$$(b\, c\, d)\, a_x - (a\, c\, d)\, b_x + (a\, b\, d)\, c_x - (a\, b\, c)\, d_x = 0$$

d'onde:

$$(b\, c\, d)\, a_x = (a\, c\, d)\, b_x + (b\, a\, d)\, c_x + (b\, c\, a)\, d_x. \quad \text{(III)}$$

Se ora per $x_1, x_2, x_3$ si pongono in queste formole rispettivamente gli aggiunti di $a_1, a_2, a_3$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

essa si cangia in quest'altra:

$$(b\,c\,d)(a\,g\,e) = (a\,c\,d)(b\,g\,e) + (b\,a\,d)(c\,g\,e) + (b\,c\,a)(d\,g\,e) \qquad \text{(IV)}$$

Formole affatto analoghe alle (I), (II), (III), (IV) si avranno nel campo binario, quaternario, ecc.

Se nella (IV) si pongano le $g_1, g_2, g_3$ uguali alle $b_1, b_2, b_3$, se ne deduce l'identità più semplice:

$$(b\,c\,d)(a\,b\,e) = (b\,a\,d)(c\,b\,e) + (b\,c\,a)(d\,b\,e)$$

ecc, ecc.

66. Esempio. Come applicazione delle formole di ri-

Cominciamo dall'osservare che se:

$$(3) \qquad \varphi = a_r \Phi_r + a_{r-1} \Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_1$$

è un siffatto semi-covariante ordinato secondo i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ di una delle serie di coefficienti in esso contenute (se non ne contenesse alcuna, lo si ordinerebbe invece secondo una delle serie di variabili) anche $\Phi_r$ è un semi-covariante.

Esprimendo infatti che $\varphi$ soddisfa all'equazione alle derivate parziali $(i+1, i)\varphi = 0$, si ottiene:

$$a_{r-1} \Phi_r + a_{r-2} \Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_2$$
$$+ a_r \cdot \left[(i+1, i)\Phi_r\right] + a_{r-1} \cdot \left[(i+1, i)\Phi_{r-1}\right] + \cdots + a_1 \left[(i+1, i)\Phi_1\right] = 0,$$

e questa identità, uguagliando a zero il coefficiente di $a_r$ ci dà:

$$(i+1, i)\,\Phi_r = 0 \quad ;$$

cioè anche $\overline{\Phi}_r$ soddisfa al sistema (II).

59. Poichè ora $\overline{\Phi}_r$ contiene una serie di coefficienti di meno di $\varphi$, si potrà ritenere che esso sia della forma:

$$\Phi_r = \sum P \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{r-1} \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_r \\ y_n & y_{n-1} & \cdots & y_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_n & z_{n-1} & \cdots & z_r \end{vmatrix} \qquad (4)$$

cioè si potrà anche ritenere che ogni prodotto di determinanti tipici dell'art. 56, che sia termine di $\overline{\Phi}_r$ contenga almeno un determinante del tipo $d_{r-1}$, ovvero almeno un

erminante del tipo $\delta_{r-1}$. Detti infatti $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r$ i pesi di ispetto agl'indici $r-1$ ed $r$, e $\bar{d}_{r-1}$, $\bar{\delta}_{r-1}$ i numeri di volte nel prodotto considerato entrano fattori del tipo $\bar{d}_{r-1}$ o ispettivamente, si dovrà avere, come si è già dimostrato:

$$\tau'_{r-1} - \tau'_r = \bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1}. \qquad (5)$$

anto, essendo $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r$ i pesi di $\Phi_r$, quelli di $\varphi$ sono per la videntemente $\tau'_{r-1}$ e $\tau'_r + 1$; onde dev'essere anche:

$$\tau'_{r-1} - (\tau'_r + 1) \geqq 0.$$

à dunque per la (5):

$$\bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1} \geqq 1;$$

appunto almeno uno dei due numeri $\bar{d}_{r-1}$ $\bar{\delta}_{r-1}$ sarà eriore a zero.

In conseguenza delle (4), se poniamo per brevità

$$= \sum (-1)^{r-1} P \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{r-1} & l_r \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_{r+1} & a_x \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_{r+1} & a_y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z_{n-1} & \dots & z_{r+1} & a_z \end{vmatrix}$$

ia:

$$a_r \Phi_r = \psi + \varphi_1,$$

e $\varphi_1$ conterrà soltanto i coefficienti $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots$; e sostituendo ciò in (3):

$$\varphi = \psi + a_{r-1} \Phi'_{r-1} + a_{r-2} \Phi'_{r-2} + \dots + a_1 \Phi'_1. \qquad (6)$$

chè ora le $P$ e $Q$ altro non sono, per supposto, che prodotti di elementi dei tipi indicati all'art. 56, la forma $\psi$

è evidentemente un semi-covariante che già si trova posto sotto la forma caratteristica desiderata; cosicchè ci basterà dimostrare ancora che il semi-covariante $\varphi - \psi$ cioè:

$$a_{r-1}\Phi'_{r-1} + a_{r-2}\Phi'_{r-2} + \cdots + a_1\Phi'_1$$

si può anch'esso rappresentare sotto la stessa forma caratteristica. Ma ragionando su $\varphi - \psi$ come si è fatto su $\varphi$, si potrà scrivere:

$$\varphi - \psi = \psi' + a_{r-2}\Phi''_{r-2} + a_{r-3}\Phi''_{r-3} + \cdots + a_1\Phi''_1$$

essendo $\psi'$ un semi-covariante già ridotto alla forma caratteristica; e così procedendo si concluderà evidentemente:

$$\varphi = \psi + \psi' + \psi'' + \cdots,$$

cioè si avrà l'intero $\varphi$ rappresentato come una somma di semi-covarianti, ciascuno dei quali è ridotto alla forma caratteristica. E pertanto anche $\varphi$ si troverà espresso come un aggregato razionale intero di elementi appartenenti ai tipi caratteristici definiti all'art. 56; c.d.d.

61. Se il semi-covariante $\varphi$ non è lineare nei coefficienti del sistema di forme fondamentali $f, f_1, f_2, \ldots$ cui si riferisce, si applicherà dapprima ad esso il processo di Aronhold in modo da trasformarlo (cfr. IV) in un semi-covariante $\bar{\varphi}$ del sistema fondamentale

$$f = a_x^m, \quad F = \alpha_x^m, \quad \ldots\ldots$$
$$f_1 = b_x^\mu, \quad F_1 = \beta_x^\mu, \quad \ldots\ldots \qquad (7)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

tenuto aggiungendo alle forme $f, f_1, \ldots$ altre mo. forme ad esse simili $F, \ldots, F_1, \ldots$ tutte fra loro in. pendenti) lineare nei coefficienti di ciascuna for. a fondamentale. Il semi-covariante $\bar{\varphi}$ si potrà an. e evidentemente considerare come un semi-cova. ante del sistema di forme fondamentali lineari:

$$a_x, \quad \alpha_x, \quad \ldots\ldots$$
$$b_x, \quad \beta_x, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$

quindi, mediante una nuova applicazione del proces. di Gordan, trasformare in un semi-covariante di un sistema di forme lineari indipendenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_x, a_x', \ldots, a_x^{(m-1)}; \alpha_x, \alpha_x', \ldots, \alpha_x^{(m-1)}; \ldots\ldots \\ b_x, b_x', \ldots, b_x^{(\mu-1)}; \beta_x, \beta_x', \ldots, \beta_x^{(\mu-1)}; \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (8)$$

reare nei coefficienti di ciascuna di esse. Per quan. si è concluso all'art. 60, il semi-covariante $\bar{\bar{\varphi}}$ si trà rappresentare come un aggregato razionale in. ro degli elementi (8), di determinanti dei tipi $\delta_0$, $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, e di determinanti dei tipi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ imposti coi varî simboli:

$$a\,,\ a'\,,\ \ldots\,,\ a^{(m-1)}\,;\ \alpha\,,\ \alpha'\,,\ \ldots\,,\ \alpha^{(m-1)}\,;\ \ldots$$

$$b\,,\ b'\,,\ \ldots\,,\ b^{(\mu-1)}\,;\ \beta\,,\ \beta'\,,\ \ldots\,,\ \beta^{(\mu-1)}\,;\ \ldots$$

. . . . . .

Ma per ritornare da $\bar{\bar{\varphi}}$ a $\varphi$, basta evidentemente di p
re:

$$a' = a'' = \cdots = a^{(m-1)} = a\,,\quad \alpha' = \alpha'' = \cdots = \alpha^{(m-1)} = \alpha$$

$$b' = b'' = \cdots = b^{(\mu-1)} = b\,,\quad \beta' = \beta'' = \cdots = \beta^{(\mu-1)} = \beta$$

. . . . . .

e di considerare come equivalenti i simboli $a, \alpha, \ldots$
e così pure come equivalenti fra loro i simboli $b$
$\beta, \ldots$; ecc.

Resta così dimostrato che: Se $\varphi$ è un semi-covariante di un sistema di forme fondamentali i cui simboli (ch possono anche essere in tutto od in parte fra loro equ valenti) siano $a, b, c, \ldots$, e le $x, y, z, \ldots$ siano le seri di variabili contenute in $\varphi$, esso si può rappresenta re come un aggregato razionale intero di elementi dei tipi

$$a_x\,,\quad b_x\quad a_y\,,\ \ldots\ldots$$

$$a_1\,,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\,,\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,,\ \ldots$$

$$x_n\,,\ \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix}\,,\qquad \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}\,,\ \ldots\,,$$

eciprocamente.

- Se $\varphi$ è un covariante dev'essere inoltre soddisfatta condizione:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_n ,$$

icchè le formole (2) ci dànno evidentemente:

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \ldots = \bar{d}_{n-1} = 0$$
$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \ldots = \bar{\delta}_{n-1} = 0 .$$

tanto: ogni covariante di un sistema di forme fonda-ntali ennarie i cui simboli (equivalenti o non equiva-tivi) siano $a, b, c, \ldots$, il quale contenga le serie di va-bili $x, y, z, \ldots$, si può rappresentare come un aggre-o razionale intero di elementi lineari $a_x, a_y, b_x, \ldots$ i parentesi ennarie dei due tipi

$$(a\ b \ldots c) \quad \text{ed} \quad (x\ y \ldots z) .$$

---

## §° XIV. Formole di riduzione.

La rappresentazione dei covarianti sotto la for-simbolica caratteristica si può in generale effettua-n molti differenti modi a causa delle relazioni i-tiche che intercedono fra gli elementi dei varii tipi atteristici:

$$a_x ,\ a_y ,\ \ldots ,\ (a\ b \ldots c),\ (x\ y \ldots z),\ \ldots$$

este relazioni dànno luogo a delle formole, così det-ielli. Teoria delle forme. Fol. 29.

te di *riduzione*, mediante l'uso delle quali si può pas-
re da una data espressione simbolica alle altre espres-
ni ad essa equivalenti. Queste formole sono dunque in-
spensabili nella tecnica della calcolazione simbolica d
le forme invariantive.

Noi ci porremo, per fissare le idee, nel campo terna
e considereremo quindi delle serie ternarie di variabil
$x_1, x_2, x_3$ ; $y_1, y_2, y_3$ e delle serie ternarie di coefficienti
simboli) o variabili controgredienti : $a_1, a_2, a_3$ ; $b_1, b_2, b_3$;
$u_1, u_2, u_3$ ; $v_1, v_2, v_3$ ; . . . . mediante le quali potremo cost
re in molti svariati modi degli elementi caratteristici
varii tipi :

$$a_x, a_y, \ldots, (x, y, z), (a, b, c), \ldots (a\, b\, u), \ldots, (u\, v\, w),$$

64 - Si ha primieramente per la regola del prodotto d
determinanti :

$$(x\, y\, z)(a\, b\, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

o più brevemente :

$$(x\, y\, z)(a\, b\, c) = (a_x\, b_y\, c_z) \qquad (1$$

Si ha poi identicamente nel campo ternario (cfr. Cap. I°,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & a_t \\ b_x & b_y & b_z & b_t \\ c_x & c_y & c_z & c_t \\ d_x & d_y & d_z & d_t \end{vmatrix} = 0 \qquad (I$$

Le altre formole di riduzione non sono che uno svolgimento delle formole fondamentali (I) e (II).

65. Sviluppando il determinante (II) secondo gli elementi della prima verticale, viene:

$$(b_y\, c_z\, d_t)\, a_x - (a_y\, c_z\, d_t)\, b_x + (a_y\, b_z\, d_t)\, c_x - (a_y\, b_z\, c_t)\, d_x = 0$$

e dividendo pel fattore $(x\, y\, z)$ che si può isolare in ogni termine mediante la (I):

$$(b\, c\, d)\, a_x - (a\, c\, d)\, b_x + (a\, b\, d)\, c_x - (a\, b\, c)\, d_x = 0$$

d'onde:

$$(b\, c\, d)\, a_x = (a\, c\, d)\, b_x + (b\, a\, d)\, c_x + (b\, c\, a)\, d_x \qquad \text{(III)}$$

Se ora per $x_1, x_2, x_3$ si pongono in queste formole rispettivamente gli aggiunti di $a_1, a_2, a_3$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

essa si cangia in quest'altra:

$$(b\, c\, d)(a\, g\, e) = (a\, c\, d)(b\, g\, e) + (b\, a\, d)(c\, g\, e) + (b\, c\, a)(d\, g\, e) \qquad \text{(IV)}$$

Formole affatto analoghe alle (I), (II), (III), (IV) si avranno nel campo binario, quaternario, ecc.

Se nella (IV) si pongano le $g_1, g_2, g_3$ uguali alle $b_1, b_2, b_3$, se ne deduce l'identità più semplice:

$$(b\, c\, d)(a\, b\, e) = (b\, a\, d)(c\, b\, e) + (b\, c\, a)(d\, b\, e)$$

ecc, ecc.

66. Esempio. Come applicazione delle formole di ri-

duzione e del principio di equivalenza dei simboli di una stessa forma fondamentale, consideriamo la forma fondamentale ternaria:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots \tag{1}$$

ed il suo covariante misto:

$$V = (a\,b\,c)(a\,c\,u)\,a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x\,, \tag{2}$$

che è una forma quadratica nelle $x_1, x_2, x_3$. Dimostreremo che questa forma è nulla identicamente, qualunque siano i valori delle $x_1, x_2, x_3$, se $y_1 ; y_2 ; y_3$ è un punto multiplo della curva $f=0$ e se $u_1 ; u_2 ; u_3$ è una retta qualunque passante per esso punto. Le condizioni presupposte sono dunque:

$$a_y^{n-1}\,a_1 = 0\,,\ a_y^{n-1}\,a_2 = 0\,,\ a_y^{n-1}\,a_3 = 0\,,\ u_y = 0 \tag{3}$$

delle quali le prime tre esprimono come è noto (poichè $a_x^{n-1}\,a_i = n \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$) che $y$ è punto multiplo di $f=0$ e la quarta che $y$ è situato sulla retta $u=0$.

Invero, se nella (2) si scambiano fra loro i due simboli equivalenti $b$ e $c$, si può anche scrivere:

$$V = -(a\,b\,c)(a\,b\,u)\,a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-2}\,b_x\,c_x \tag{2'}$$

onde anche, sommando le (2) e (2)' membro a membro:

$$V = \tfrac{1}{2}(a\,b\,c)\left\{(a\,c\,u)\,b_y - (a\,b\,u)\,c_y\right\} a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x\,.$$

Ma, per la formola (III), si ha identicamente:

$$(a\,c\,u)\,b_y - (a\,b\,u)\,c_y = (b\,c\,u)\,a_y + (a\,c\,b)\,u_y\,,$$

onde si può anche scrivere:

$$V = \tfrac{1}{2}(abc)\left\{(bcu)a_y + (acb)u_y\right\} a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x ,$$

cioè:

$$2V = (abc)(bcu)a_y^{n-1} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ (abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x \cdot u_y \quad .$$

Di qui appare chiaramente quanto si è asserito, poichè la seconda parte del 2° membro si scrive in due fattori (ciascuno dei quali ha significato effettivo) dei quali il secondo $u_y$ è nullo per supposto. Quanto alla prima parte, essa si può scrivere, sviluppando il determinante $(abc)$, come segue:

$$a_y^{n-2} a_1 \cdot [b_2 c_3 - b_3 c_2](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ a_y^{n-2} a_2 \cdot [b_3 c_1 - b_1 c_3](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ a_y^{n-2} a_3 \cdot [b_1 c_2 - b_2 c_1](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$

cioè come somma di tre parti, da ognuna delle quali si può separare un fattore di significato effettivo, $a_y^{n-2} a_i$, che è nullo per le (3).

---

## §° XV. *Origini o sorgenti (sources) dei covarianti*

67 – Sia $\varphi$ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali $n^{\text{arie}}$, il quale contenga $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ rispettivamente a certi gradi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (i quali possono del resto anche essere nulli).

Sia

$$\varphi = Q_0 x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \cdots t_n^{m_n} + \cdots + Q x_1^{\mu_1'} x_2^{\mu_1''} \cdots x_n^{\mu_1^{(n)}} \cdots t_1^{\mu_n'} t_2^{\mu_n''} \cdots t_n^{\mu_n^{(n)}} + \cdots, \qquad (1)$$

cioè si indichi con $Q_0$ il coefficiente di

$$x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \cdots t_n^{m_n}.$$

Esso si chiamerà l'origine (source) del covariante $\varphi$; poichè è facile riconoscere che il covariante $\varphi$ è perfettamente determinato appena che se ne conosca il coefficiente $Q_0$.

Sia infatti:

$$\varphi = \Phi(a_x, a_y, \ldots, d_t; b_x, b_y, \ldots, b_t; \ldots; (a\,b \ldots d), \ldots) \qquad (2)$$

l'espressione simbolica caratteristica (cfr. §° XIII) di $\varphi$.

Che $Q_0$ si deduce da $\varphi$ ponendo in $\varphi$:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \ldots x_n = 0 \\ y_1 = 0, \; y_2 = 1, \; y_3 = 0, \ldots y_n = 0 \\ z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 1, \ldots z_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1 = 0, \; t_2 = 0, \; t_3 = 0, \ldots t_n = 1, \end{array} \qquad (3)$$

si deduce evidentemente dalla (2) la seguente espressione simbolica di $Q_0$:

$$Q_0 = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; (a\,b \ldots d), \ldots) \qquad (4)$$

Reciprocamente, se indichiamo con $[Q_0]$ ciò che diviene l'espressione simbolica (4) di $Q_0$ quando in luogo di:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots$$

poniamo in essa rispettivamente dapertutto:

$$[Q_0] = \Phi(a_x, a_y, \ldots, a_t; b_x, b_y, \ldots, b_t; \ldots; (a_x b_y \ldots d_t), \ldots),$$

ossia anche, se $\tau$ è il peso del covariante $\varphi$ (peso che noi, per semplicità, abbiamo implicitamente supposto essere positivo, dal momento che abbiamo scritto $\varphi$ sotto la forma simbolica (2)):

$$[Q_0] = (x\,y\,z \ldots t)^{\tau} \cdot \varphi \,. \tag{5}$$

Dall'origine $Q_0$ ritorniamo dunque, mediante l'operazione indicata, al primitivo covariante $Q_0$, a meno della potenza $\tau^{esima}$ di $(x\,y \ldots z)$. Si noti che il numero $\tau$ è già perfettamente determinato (cfr. Cap. I, §° XV) dal primo termine:

$$Q_0\, x_1^{m_1}\, y_2^{m_2}\, z_3^{m_3} \ldots t_n^{m_n}$$

del covariante $\varphi$.

68. Se indichiamo con $Q_0'$ la stessa funzione $Q_0$ dei coefficienti delle forme fondamentali costruita per le forme fondamentali trasformate i cui coefficienti simbolici corrispondenti ad $a, b, \ldots$ siano rispettivamente $a', b', \ldots$, l'espressione simbolica di $Q_0'$ sarà, invece della (4):

$$Q_0' = \Phi(a_1', a_2', \ldots, a_n'; b_1', b_2', \ldots b_n'; \ldots; (a'b' \ldots a'), \ldots)$$

e se:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_1 \xi_1' + \beta_1 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_1 \xi_n' \\
\xi_2 &= \alpha_2 \xi_1' + \beta_2 \xi_2' + \cdots + \varepsilon_2 \xi_n' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n &= \alpha_n \xi_1' + \beta_n \xi_2' + \cdots + \varepsilon_n \xi_n'
\end{aligned} \tag{6}$$

sia la sostituzione lineare eseguita sulle forme fondamentali, basterà (Cap. I, §° XI) perchè $Q_0'$ ridivenga $Q_0$, eseguire in (5) le sostituzioni:

$$\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \quad , \quad b_1' = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n \\
a_2' &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n \quad , \quad b_2' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n' &= \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n \qquad b_n' = \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n
\end{aligned}$$

o, più brevemente:

$$a_1' = a_\alpha , a_2' = a_\beta , \ldots , a_n' = a_\varepsilon ; b_1 = b_\alpha , b_2' = b_\beta , \ldots b_n' = b_\varepsilon ; \ldots -$$

Dunque, per costruire $[Q_0]$ basta costruire $Q_0'$, esprimere poi nuovamente $Q_0'$ coi coefficienti delle forme primitive e coi coefficienti della sostituzione lineare e sostituire finalmente in luogo dei coefficienti della sostituzione lineare le serie di variabili $x, y, z, \ldots$, cioè precisamente:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= x_1 , \ \alpha_2 = x_2 , \ldots , \alpha_n = x_n \\
\beta_1 &= y_1 , \ \beta_2 = y_2 , \ldots , \beta_n = y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_1 &= t_1 , \ \varepsilon_2 = t_2 , \ldots , \varepsilon_n = t_n .
\end{aligned} \tag{7}$$

Al risultato dell'art. prec. espresso dalla (5), si può

unque dare la forma seguente[*]: ogni covariante ennario, peso $\tau$ contenente $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ moltiplicato per $(xyz\ldots t)^{\tau}$ si può ottenere costruendo la sua origine per le forme fondamentali trasformate mediante una sostituzione lineare (6), esprimendo poi l'origine trasformata mediante i coefficienti delle forme primitive e sostituendo finalmente nel risultato ottenuto in luogo delle serie $\beta, \ldots, \delta$ dei coefficienti della sostituzione, le serie di variabili $x, y, \ldots, t$ (come è indicato dalle (7)).

- Le equazioni differenziali (cfr. §° X):

$$\Delta_{ij}\varphi = \mathcal{D}_{ji}\varphi \qquad (8) \qquad , \; i \neq j$$

- deve soddisfare il covariante $\varphi$ ci dànno il modo di coniare un processo derivativo mediante il quale uno qualunque dei coefficienti di $\varphi$ si può dedurre dall'origine $Q_0$.

a:

$$\varphi = \sum_{k_1, k_2, \ldots} Q_{k_1, k_2 \ldots k_n ; k_1, k_2, \ldots k_n ; \ldots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n} \ldots \qquad (9)$$

sviluppo del covariante $\varphi$, cosicchè le $Q$ si possono pensare come funzioni razionali intere dei coefficienti del

---

[*] Cfr. Deruyts: Essai d'une théorie ecc. pgg. 67-70, dove si trovano anche dati, altra dimostrazione, alcuni degli altri teoremi che seguono.

le forme fondamentali o dei simboli $a, b, c, \dots$ che le rappresentano secondochè si preferirà, in ciò che segue, di applicare gli operatori $\Delta_{ij}$ sulle forme simboliche (§° X) ovvero sulle forme effettive (nel qual caso l'operatore $\Delta_{ij}$ si interpreterà mediante un operatore equivalente (§° XII) da eseguirsi fra i coefficienti effettivi delle forme fondamentali. L'equazione (8) ci dà per $i = 1$, $j = 2$:

$$\sum_{h,k,\dots} \left\{ \Delta_{12} Q_{h,h_2\dots k,k_2\dots} \right\} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots y_1^{k_1} y_2^{k_2}$$

$$= \sum_{h,k,\dots} Q_{h,h_2\dots k,k_2\dots} \left\{ h_2 x_1^{h_1+1} x_2^{h_2-1} \dots y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots + k_2 x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots y_1^{k_1+1} y_2^{k_2-1} \dots + \dots \right\}$$

d'onde, uguagliando i coefficienti dei termini simili nel 1° e nel 2° membro:

$$(10) \qquad \Delta_{12} Q_{h,h_2\dots k,k_2\dots l,l_2\dots} =$$

$$= (h_2+1) Q_{h_1-1,h_2+1,\dots,k_1,k_2,\dots} + (k_2+1) Q_{h_1,h_2\dots,k_1-1,k_2+1,\dots} + \dots$$

Se in questa formola supponiamo:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = m_2, \quad k_3 = 0, \dots k_n = 0$$

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = m_3, \dots, l_n = 0$$

(essendo, come all'art. 67), $m_1, m_2, \dots m_n$ i gradi di $\varphi$ nelle $x, y, \dots t$) i termini del secondo membro a cominciare dal secondo debbono tralasciarsi come privi di senso (perchè avrebbero indici negativi), e resta semplicemente:

(12) $\alpha_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1, k_2, \dots, k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; 0, 0, 0, m_4, 0, \dots, 0 ; \dots}$

Applicando ad esso la formola (10) dovremo trascurare nel secondo membro tutti i termini a cominciare dal terzo, onde avremo:

$$Q_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1 - 1, k_2 + 1, k_3, \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

$$= \frac{1}{k_2 + 1} \Delta_{12} Q_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1 k_2 \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

$$- \frac{h_2 + 1}{k_2 + 1} Q_{h_1 - 1, h_2 + 1, h_3, \dots, h_n ; k_1 k_2 \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

Di qui si vede che la determinazione di un coefficiente del tipo (12) si può far dipendere, con processo successivo, dalla determinazione di coefficienti dello stesso tipo nei quali la somma $k_2 + \dots + k_n$ va diminuendo di un'unità, quindi finalmente dalla determinazione di coefficienti del tipo (11). Ma questi erano già noti; dunque dobbiamo ritenere come noti tutti i coefficienti del tipo (12). Così procedendo verremo evidentemente a stabilire la verità di quanto volevamo dimostrare.

70. Se il coefficiente dato non fosse $Q_0$, ma un altro qualsivoglia, il teorema non sussisterebbe più in generale, cioè gli altri coefficienti non resterebbero con ciò completamente determinati. Solamente nel caso in cui il covariante $\varphi$ contenga una sola serie di variabili $x$, i coefficienti resteranno tutti determinati in conseguenza della

$$Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

$$=\frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

Applicando ripetutamente questa formola si ottiene:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\underline{|h_2}}\,\Delta_{12}^{h_2}\,Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

e, affatto similmente, operando coll'indice 3 come si è operato coll'indice 2:

$$Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\underline{|h_3}}\,\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

onde sostituendo nella formola precedente:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}}\cdot\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;\dots}$$

Così procedendo si otterrà finalmente, poichè $h_1+h_2+\dots+h_n=m$,

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\underline{|h_2}\,\underline{|h_3}\cdots\underline{|h_n}}\,\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\cdots\Delta_{1n}^{h_n}\,Q_{m,0,0,\dots,0;0,m_2;0,\dots,0;0,0,m_3;0,\dots0;\dots}$$

In virtù di questa formola, essendo conosciuta la funzione:

$$Q_{m,0,0,\dots,0;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

restano perfettamente determinati i coefficienti del tipo

(11) $$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

determinazione di uno qualunque fra essi. Ciò segue dalla (10) che in tal caso prende la forma:

$$Q_{k_1-1,k_2+1,\dots,k_n} = \frac{1}{k_2+1}\cdot\Delta_{12}\, Q_{k_1k_2\dots k_n}$$

e dalla formola analoga:

$$Q_{k_1k_2\dots k_n} = \frac{1}{k_1-1}\cdot\Delta_{21}\, Q_{k_1-1,k_2+1,k_3,\dots,k_n},$$

le quali si mostrano come, dato l'uno dei due coefficienti:

$$Q_{k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_j+1,\dots,k_n} \quad \text{e} \quad Q_{k_1,\dots,k_i,\dots,k_j,\dots,k_n},$$

l'altro resti determinato e reciprocamente.

71. Se fra i covarianti $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$ di un certo sistema fondamentale esiste una relazione algebrica identica:

$$J(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}) = 0 \tag{13}$$

è senz'altro manifesto che questa stessa relazione sussisterà anche fra le origini $Q_0, Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ dei medesimi covarianti; poichè se nell'identità (13), in cui $J$ è simbolo di funzione intera, si pone $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, \dots, y_n = 0, \dots$, essa si cangia appunto nella identità:

$$J\left(Q_0, Q_0', Q_0'', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}\right) = 0 \tag{14}$$

Reciprocamente ad ogni relazione algebrica fra le $Q_0$, $Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ corrisponderà una relazione analoga fra $\varphi$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$, come si vede scrivendo l'identità (14) pel sistema fondamentale trasformato mediante una certa sostituzione lineare (6); esprimendo quindi in essa i coefficien-

ti trasformati mediante i primitivi e sostituendo per ultimo ai coefficienti della sostituzione lineare le serie $x, y, \ldots$ $\ldots, t$ nel modo indicato all'art. 69; giacchè così facendo si otterrà la stessa relazione (14) in cui ogni origine $Q_0^{(i)}$ è surrogata a meno di un fattore, potenza di $(x\,y\,z \ldots t)$, dal corrispondente covariante $\varphi_i$.

72 - Ogni funzione razionale intera dei coefficienti del sistema fondamentale (la quale possa contenere anche altre serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ distinte dalle $n$ serie $x, y, z \ldots, t$, la quale sia isobarica, (e precisamente dello stesso peso rispetto ad ognuno degl'indici $1, 2, \ldots, n$, è l'origine di un covariante $\varphi$ di peso $-\rho$; essendo $\rho$ il grado di $Q$ rispetto alle $\xi, \eta, \ldots$. Il covariante $\varphi$ si otterrà moltiplicando per $(x\,y\,z \ldots t)^\rho$ la $Q$ costruita pel sistema fondamentale trasformato mediante la sostituzione lineare (6) nella quale poi, come all'art. 68, i coefficienti trasformati e le variabili trasformate si esprimono coi primitivi, e i coefficienti della sostituzione lineare si sostituiscono colle serie $x, y, z, \ldots t$ nel modo indicato dalle (7).

Sia infatti:

$$Q = F(a_1, b_1, \ldots; \ldots; a_n, b_n, \ldots; \xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_2, \eta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots)$$

essendo $F$ simbolo di funzione intera isobarica, come si è supposto rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$. Questa funzione è evidentemente l'origine del covariante:

$$\varphi = F(a_x, b_x, \ldots; \ldots; a_t, b_t, \ldots; (\xi y z \ldots t), (\eta y z \ldots t), \ldots; (x \xi z \ldots t), (x \eta z \ldots t), \ldots; \ldots;$$
$$; (x y z \ldots \xi), (x y z \ldots \eta), \ldots)$$

il quale si deduce da $Q$ precisamente nel modo detto sopra. Infatti indicando con $[\xi_i]$ ciò che divengono le $\xi_i$ contenute in $Q$ quando si opera anche su di esse nel modo indicato, cioè in luogo di $\xi_i$ si sostituisca la trasformata $\xi_i'$ la quale si torna poi ad esprimere colle $\xi$ e colle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ecc., si trae dalle (6), (per esempio per $i = 1$):

$$\xi_1' = \begin{vmatrix} \xi_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \xi_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix}$$

e quindi:

$$[\xi_1'] = (\xi\, y\, z \ldots t) : (x\, y\, z \ldots t)$$

ecc.

73. *Sia $\varphi$ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali, il quale possa anche contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Uno qualunque dei coefficienti è l'origine di un covariante, che non contiene più di $n$ serie di variabili, il quale si può dedurre da $\varphi$ mediante operazioni di polare fra le serie di variabili.*

Invero, siano $\xi, \eta, \ldots, \theta$ le serie di variabili contenute in $\varphi$ $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ i gradi di $\varphi$ in ciascuna di esse rispettivamente, cosicchè si potrà porre simbolicamente:

Sia

$$\varphi = Q_0 x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \cdots t_n^{m_n} + \cdots + Q x_1^{\mu_1'} x_2^{\mu_1''} \cdots x_n^{\mu_1^{(n)}} \cdots t_1^{\mu_n'} t_2^{\mu_n''} \cdots t_n^{\mu_n^{(n)}} + \cdots, \qquad (1)$$

cioè si indichi con $Q_0$ il coefficiente di

$$x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \cdots t_n^{m_n}.$$

Esso si chiamerà l'origine (source) del covariante $\varphi$; poichè è facile riconoscere che il covariante $\varphi$ è perfettamente determinato appena che se ne conosca il coefficiente $Q_0$.

Sia infatti:

$$\varphi = \Phi(a_x, a_y, \ldots, d_t; b_x, b_y, \ldots, b_t; \ldots; (a\,b \ldots d), \ldots) \qquad (2)$$

l'espressione simbolica caratteristica (cfr. §° XIII) di $\varphi$. Poichè $Q_0$ si deduce da $\varphi$ ponendo in $\varphi$:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \ldots x_n = 0 \\ y_1 = 0, \; y_2 = 1, \; y_3 = 0, \ldots y_n = 0 \\ z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 1, \ldots z_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1 = 0, \; t_2 = 0, \; t_3 = 0, \ldots t_n = 1, \end{array} \qquad (3)$$

si deduce evidentemente dalla (2) la seguente espressione simbolica di $Q_0$:

$$Q_0 = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; (a\,b \ldots d), \ldots) \qquad (4)$$

Reciprocamente, se indichiamo con $[Q_0]$ ciò che diviene l'espressione simbolica (4) di $Q_0$ quando in luogo di

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots$$

poniamo in essa rispettivamente dapertutto:

$$[Q_0] = \Phi(a_x, a_y, \ldots, a_t; b_x, b_y, \ldots, b_t; \ldots; (a_x b_y \ldots d_t), \ldots),$$

ossia anche, se $\tau$ è il peso del covariante $\varphi$ (peso che noi, per semplicità, abbiamo implicitamente supposto essere positivo, dal momento che abbiamo scritto $\varphi$ sotto la forma simbolica (2)):

$$[Q_0] = (x\,y\,z \ldots t)^{\tau} \cdot \varphi \,. \tag{5}$$

Dall'origine $Q_0$ ritorniamo dunque, mediante l'operazione indicata, al primitivo covariante $Q_0$, a meno della potenza $\tau^{esima}$ di $(x\,y \ldots z)$. Si noti che il numero $\tau$ è già perfettamente determinato (cfr. Cap. I, §° XV) dal primo termine:

$$Q_0\, x_1^{m_1}\, y_2^{m_2}\, z_3^{m_3} \ldots t_n^{m_n}$$

del covariante $\varphi$.

68. Se indichiamo con $Q_0'$ la stessa funzione $Q_0$ dei coefficienti delle forme fondamentali costruita per le forme fondamentali trasformate i cui coefficienti simbolici corrispondenti ad $a, b, \ldots$ siano rispettivamente $a', b', \ldots$, l'espressione simbolica di $Q_0'$ sarà, invece della (4):

$$Q_0' = \Phi(a_1', a_2', \ldots, a_n'; b_1', b_2', \ldots b_n'; \ldots; (a'b' \ldots d'), \ldots)$$

e se:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_1 \xi_1' + \beta_1 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_1 \xi_n' \\
\xi_2 &= \alpha_2 \xi_1' + \beta_2 \xi_2' + \cdots + \varepsilon_2 \xi_n' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n &= \alpha_n \xi_1' + \beta_n \xi_2' + \cdots + \varepsilon_n \xi_n'
\end{aligned} \tag{6}$$

sia la sostituzione lineare eseguita sulle forme fondamentali, basterà (Cap. I, §° XI) perchè $Q_0'$ ridivenga $Q_0$, eseguire in (5) le sostituzioni:

$$a_1' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \quad , \quad b_1' = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

$$a_2' = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n \quad , \quad b_2' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n' = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n \qquad b_n' = \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n$$

o, più brevemente:

$$a_1' = a_\alpha , a_2' = a_\beta , \ldots , a_n' = a_\varepsilon ; b_1 = b_\alpha , b_2' = b_\beta , \ldots b_n' = b_\varepsilon ; \ldots$$

Dunque, per costruire $[Q_0]$ basta costruire $Q_0'$, esprimere poi nuovamente $Q_0'$ coi coefficienti delle forme primitive e coi coefficienti della sostituzione lineare e sostituire finalmente in luogo dei coefficienti della sostituzione lineare le serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ cioè precisamente:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= x_1 , \ \alpha_2 = x_2 , \ldots , \alpha_n = x_n \\
\beta_1 &= y_1 , \ \beta_2 = y_2 , \ldots , \beta_n = y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_1 &= t_1 , \ \varepsilon_2 = t_2 , \ldots , \varepsilon_n = t_n .
\end{aligned} \tag{7}$$

Al risultato dell'art. prec. espresso dalla (5), si può

dunque dare la forma seguente[*]: ogni covariante ennario, di peso $\tau$ contenente $n$ serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ moltiplicato per $(xyz\ldots t)^{\tau}$ si può ottenere costruendo la sua origine $Q_0$ per le forme fondamentali trasformate mediante una sostituzione lineare (6), esprimendo poi l'origine trasformata $Q_0'$ mediante i coefficienti delle forme primitive e sostituendo finalmente nel risultato ottenuto in luogo delle serie $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ dei coefficienti della sostituzione, le serie di variabili $x, y, \ldots, t$ (come è indicato dalle (7)).

69 – Le equazioni differenziali (cfr. §° X):

$$\Delta_{ij}\varphi = \mathcal{D}_{ji}\varphi \qquad (8) \qquad , \; i \neq j$$

cui deve soddisfare il covariante $\varphi$ ci dànno il modo di costruire un processo derivativo mediante il quale uno qualunque dei coefficienti di $\varphi$ si può dedurre dall'origine $Q_0$.

Sia:

$$\varphi = \sum_{h_1, k_1, \ldots} Q_{h_1, h_2 \ldots h_n ; k_1, k_2, \ldots k_n ; \ldots} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n} \ldots \qquad (9)$$

lo sviluppo del covariante $\varphi$, cosicchè le $Q$ si possono pensare come funzioni razionali intere dei coefficienti del

---

[*] Cfr. Deruyts: Essai d'une théorie ecc. pgg. 67-70, dove si trovano anche dati, con altra dimostrazione, alcuni degli altri teoremi che seguono.

le forme fondamentali o dei simboli $a, b, c, \ldots$ che le rappresentano secondochè si preferirà, in ciò che segue, di applicare gli operatori $\Delta_{ij}$ sulle forme simboliche (§° X) ovvero sulle forme effettive (nel qual caso l'operatore $\Delta_{ij}$ si interpreterà mediante un operatore equivalente (§° XII) da eseguirsi fra i coefficienti effettivi delle forme fondamentali. L'equazione (8) ci dà per $i = 1$, $j = 2$:

$$\sum_{h,k,\ldots}\left\{\Delta_{12} Q_{h,h_2\ldots k,k_2\ldots}\right\} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots y_1^{k_1} y_2^{k_2}$$

$$= \sum_{h,k,\ldots} Q_{h_1,h_2\ldots k,k_2\ldots}\left\{h_2 x_1^{h_1+1} x_2^{h_2-1} \cdots y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots + k_2 x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots y_1^{k_1+1} y_2^{k_2-1} \cdots + \cdots\right\}$$

d'onde, uguagliando i coefficienti dei termini simili nel 1° e nel 2° membro:

$$\Delta_{12} Q_{h,h_2\ldots k,k_2\ldots l,l_2\ldots} = \tag{10}$$

$$= (h_2+1) Q_{h_1-1,h_2+1,\ldots,k_1,k_2,\ldots} + (k_2+1) Q_{h_1,h_2\ldots,k_1-1,k_2+1,\ldots} + \cdots$$

Se in questa formola supponiamo:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = m_2, \quad k_3 = 0, \ldots k_n = 0$$

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = m_3, \ldots, l_n = 0$$

(essendo, come all'art. 67), $m_1, m_2, \ldots m_n$ i gradi di $\varphi$ nelle $x, y, \ldots t$) i termini del secondo membro a cominciare dal secondo debbono tralasciarsi come privi di senso (perchè avrebbero indici negativi), e resta semplicemente:

Consideriamo ora un coefficiente del tipo:

(12) $Q_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1, k_2, \dots, k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; 0, 0, 0, m_4, 0, \dots, 0 ; \dots}$

Applicando ad esso la formola (10) dovremo trascurare nel secondo membro tutti i termini a cominciare dal terzo, onde avremo:

$$Q_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1 - 1, k_2 + 1, k_3, \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

$$= \frac{1}{k_2 + 1} \Delta_{12} Q_{h_1 h_2 \dots h_n ; k_1 k_2 \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

$$- \frac{h_2 + 1}{k_2 + 1} Q_{h_1 - 1, h_2 + 1, h_3, \dots, h_n ; k_1 k_2 \dots k_n ; 0, 0, m_3, 0, \dots, 0 ; \dots}$$

Di qui si vede che la determinazione di un coefficiente del tipo (12) si può far dipendere, con processo successivo, dalla determinazione di coefficienti dello stesso tipo nei quali la somma $k_2 + \dots + k_n$ va diminuendo di un'unità, e quindi finalmente dalla determinazione di coefficienti del tipo (11). Ma questi erano già noti; dunque dobbiamo ritenere come noti tutti i coefficienti del tipo (12) Co- procedendo verremo evidentemente a stabilire la verità di quanto volevamo dimostrare.

2 — Se il coefficiente dato non fosse $Q_0$, ma un altro qualsivoglia, il teorema non sussisterebbe più in generale, cioè gli altri coefficienti non resterebbero con ciò completamente determinati. Solamente nel caso in cui il covariante $\varphi$ contenga una sola serie di variabili $x$, i coefficienti resteranno tutti determinati in conseguenza della

$$Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

$$=\frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

Applicando ripetutamente questa formola si ottiene:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2}\,\Delta_{12}^{h_2}\,Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

e, affatto similmente, operando coll'indice 3 come si è operato coll'indice 2:

$$Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_3}\,\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

onde sostituendo nella formola precedente:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2\,\lfloor h_3}\cdot\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;\dots}$$

Così procedendo si otterrà finalmente, poichè $h_1+h_2+\dots+h_n=$

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2\,\lfloor h_3\cdots\lfloor h_r}\,\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\cdots\Delta_{1n}^{h_n}\,Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2;0,\dots,0;0,0,m_3;0,\dots0;\dots}$$

In virtù di questa formola, essendo conosciuta la funzione

$$Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

restano perfettamente determinati i coefficienti del tip

(11) $$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

determinazione di uno qualunque fra essi. Ciò segue dalla (10) che in tal caso prende la forma:

$$Q_{h_1-1,h_2+1,\dots,h_n} = \frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n}$$

e dalla formola analoga:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n} = \frac{1}{h_1-1}\cdot\Delta_{21}\,Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n},$$

le quali si mostrano come, dato l'uno dei due coefficienti:

$$Q_{h_1,\dots,h_i-1,\dots,h_j+1,\dots,h_n} \quad \text{e} \quad Q_{h_1,\dots,h_i,\dots,h_j,\dots,h_n},$$

l'altro resti determinato e reciprocamente.

71. Se fra i covarianti $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$ di un certo sistema fondamentale esiste una relazione algebrica identica:

$$J(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}) = 0 \tag{13}$$

è senz'altro manifesto che questa stessa relazione sussisterà anche fra le origini $Q_0, Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ dei medesimi covarianti; poichè se nell'identità (13), in cui $J$ è simbolo di funzione intera, si pone $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, \dots, y_n = 0, \dots$, essa si cangia appunto nella identità:

$$J\left(Q_0, Q_0', Q_0'', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}\right) = 0 \tag{14}$$

Reciprocamente ad ogni relazione algebrica fra le $Q_0$, $Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ corrisponderà una relazione analoga fra $\varphi$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$, come si vede scrivendo l'identità (14) pel sistema fondamentale trasformato mediante una certa sostituzione lineare (6); esprimendo quindi in essa i coefficien-

ti trasformati mediante i primitivi e sostituendo per ultimo ai coefficienti della sostituzione lineare le serie $x, y, \ldots$ $\ldots, t$ nel modo indicato all'art. 69; giacchè così facendo si otterrà la stessa relazione (14) in cui ogni origine $Q_0^{(i)}$ è surrogata a meno di un fattore, potenza di $(x\,y\,z \ldots t)$, dal corrispondente covariante $\varphi_i$.

72 - Ogni funzione razionale intera dei coefficienti del sistema fondamentale (la quale possa contenere anche altre serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ distinte dalle $n$ serie $x, y, z \ldots, t$, la quale sia isobarica, (e precisamente dello stesso peso rispetto ad ognuno degl'indici $1, 2, \ldots, n$, è l'origine di un covariante $\varphi$ di peso $-\rho$; essendo $\rho$ il grado di $Q$ rispetto alle $\xi, \eta, \ldots$. Il covariante $\varphi$ si otterrà moltiplicando per $(x\,y\,z \ldots t)^\rho$ la $Q$ costruita pel sistema fondamentale trasformato mediante la sostituzione lineare (6) nella quale poi, come all'art. 68, i coefficienti trasformati e le variabili trasformate si esprimono coi primitivi, e i coefficienti della sostituzione lineare si sostituiscono colle serie $x, y, z, \ldots t$ nel modo indicato dalle (7).

Sia infatti:

$$Q = F(a_1, b_1, \ldots; \ldots; a_n, b_n, \ldots; \xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_2, \eta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots)$$

essendo $F$ simbolo di funzione intera isobarica, come si è supposto rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$. Questa funzione è evidentemente l'origine del covariante:

$$\varphi = F(a_x, b_x, \ldots; \ldots; a_t, b_t, \ldots; (\xi y z \ldots t), (\eta y z \ldots t), \ldots; (x \xi z \ldots t), (x \eta z \ldots t), \ldots; \ldots;$$
$$; (x y z \ldots \xi), (x y z \ldots \eta), \ldots)$$

il quale si deduce da $Q$ precisamente nel modo detto sopra. Infatti indicando con $[\xi_i]$ ciò che divengono le $\xi_i$ contenute in $Q$ quando si opera anche su di esse nel modo indicato, cioè in luogo di $\xi_i$ si sostituisca la trasformata $\xi_i'$ la quale si torna poi ad esprimere colle $\xi$ e colle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ecc., si trae dalle (6), (per esempio per $i = 1$):

$$\xi_1' = \begin{vmatrix} \xi_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \xi_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix}$$

e quindi:

$$[\xi_1'] = (\xi\, y\, z \ldots t) : (x\, y\, z \ldots t)$$

ecc.

73. *Sia $\varphi$ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali, il quale possa anche contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Uno qualunque dei coefficienti è l'origine di un covariante, che non contiene più di $n$ serie di variabili, il quale si può dedurre da $\varphi$ mediante operazioni di polare fra le serie di variabili.*

Invero, siano $\xi, \eta, \ldots, \theta$ le serie di variabili contenute in $\varphi$ $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ i gradi di $\varphi$ in ciascuna di esse rispettivamente, cosicchè si potrà porre simbolicamente:

ti trasformati mediante i primitivi e sostituendo per ultimo ai coefficienti della sostituzione lineare le serie $x, y, \ldots$ $\ldots, t$ nel modo indicato all'art. 69; giacchè così facendo si otterrà la stessa relazione (14) in cui ogni origine $Q_0^{(i)}$ è surrogata a meno di un fattore, potenza di $(x\,y\,z \ldots t)$, dal corrispondente covariante $\varphi_i$.

72 - Ogni funzione razionale intera dei coefficienti del sistema fondamentale (la quale possa contenere anche altre serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ distinte dalle $n$ serie $x, y, z \ldots, t$, la quale sia isobarica, (e precisamente dello stesso peso rispetto ad ognuno degl'indici $1, 2, \ldots, n$, è l'origine di un covariante $\varphi$ di peso $-\rho$; essendo $\rho$ il grado di $Q$ rispetto alle $\xi, \eta, \ldots$. Il covariante $\varphi$ si otterrà moltiplicando per $(x\,y\,z \ldots t)^\rho$ la $Q$ costruita pel sistema fondamentale trasformato mediante la sostituzione lineare (6) nella quale poi, come all'art. 68, i coefficienti trasformati e le variabili trasformate si esprimono coi primitivi, e i coefficienti della sostituzione lineare si sostituiscono colle serie $x, y, z, \ldots t$ nel modo indicato dalle (7).

Sia infatti:

$$Q = F(a_1, b_1, \ldots; \ldots; a_n, b_n, \ldots; \xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_2, \eta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots)$$

essendo $F$ simbolo di funzione intera isobarica, come si è supposto rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$. Questa funzione è evidentemente l'origine del covariante:

$$\varphi = F(a_x, b_x, \ldots; \ldots; a_t, b_t, \ldots; (\xi y z \ldots t), (\eta y z \ldots t), \ldots; (x \xi z \ldots t), (x \eta z \ldots t), \ldots; \ldots;$$
$$; (x y z \ldots \xi), (x y z \ldots \eta), \ldots)$$

il quale si deduce da $Q$ precisamente nel modo detto sopra. Infatti indicando con $[\xi_i]$ ciò che divengono le $\xi_i$ contenute in $Q$ quando si opera anche su di esse nel modo indicato, cioè in luogo di $\xi_i$ si sostituisca la trasformata $\xi_i'$ la quale si torna poi ad esprimere colle $\xi$ e colle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ecc., si trae dalle (6), (per esempio per $i = 1$):

$$\xi_1' = \begin{vmatrix} \xi_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \xi_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix}$$

e quindi:

$$[\xi_1'] = (\xi\, y\, z \ldots t) : (x\, y\, z \ldots t)$$

ecc.

73. *Sia $\varphi$ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali, il quale possa anche contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Uno qualunque dei coefficienti è l'origine di un covariante, che non contiene più di $n$ serie di variabili, il quale si può dedurre da $\varphi$ mediante operazioni di polare fra le serie di variabili.*

Invero, siano $\xi, \eta, \ldots, \theta$ le serie di variabili contenute in $\varphi$ $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ i gradi di $\varphi$ in ciascuna di esse rispettivamente si potrà porre simbolicamente:

$$\varphi = A_\xi^\lambda \; B_\eta^\mu \; . \; . \; . \; C_\theta^\nu$$

Ciò posto, un coefficiente qualunque di $\varphi$ è dato, fatta astrazione da un fattore numerico polinomide da:

$$A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_n^{\lambda_n} B_1^{\mu_1} B_2^{\mu_2} \ldots B_n^{\mu_n} \ldots C_1^{\nu_1} C_2^{\nu_2} \ldots C_n^{\nu_n} \qquad (2)$$

ed è evidentemente l'origine della forma:

$$\psi = A_x^{\lambda_1} A_y^{\lambda_2} \ldots A_t^{\lambda_n} B_x^{\mu_1} B_y^{\mu_2} \ldots B_t^{\mu_n} \ldots C_x^{\nu_1} C_y^{\nu_2} \ldots C_t^{\nu_n}$$

contenente le sole $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$, la quale sappiamo (Cap. I, §° X) potersi sempre dedurre dalla forma (1) mediante operazioni di polare fra le serie $x, y, z, \ldots, t, \xi, \eta, \ldots, \theta$. La forma $\psi$ è dunque una polare di $\varphi$ ed è quindi necessariamente (art. 13) un covariante del sistema fondamentale dato. L'asserto è così dimostrato.

13. *Sia come sopra, $\varphi$ un covariante il quale possa contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Se si opera su uno qualunque dei coefficienti di $\varphi$ col simbolo operativo $(i, j)$, il risultato sarà una combinazione lineare a coefficienti numerici, dei coefficienti dello stesso $\varphi$.*

È questa una conseguenza quasi immediata della condizione differenziale:

$$(i, j)\,\varphi = 0$$

cui soddisfa identicamente come sappiamo (§° XII), il covariante $\varphi$. Se sia infatti:

$$\varphi = \sum_{\mu,\nu,\dots} A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n,\nu_1\nu_2\dots\nu_n,\dots}\, \xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\mu_1}\eta_2^{\mu_2}\cdots\eta_n^{\mu_n}\cdots\cdots$$

si ha:

$$(i,j)\varphi = \sum_{\mu,\nu,\dots}\left[(i,j)A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}\right]\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\cdots$$

$$+\sum_{\mu,\nu} A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}\left[(i,j)\left\{\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\right\}\right]$$

cosicchè, uguagliando a zero il coefficiente di

$$\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\cdots$$

si ha appunto per

$$(i,j)A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}$$

un'espressione della forma indicata nell'enunciato.

---

## §° XVI - *Dimostrazione di un principio generale di aritmetica* -

75 - Si indichi per brevità con $X$ uno qualunque degli infiniti sistemi di numeri interi e positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti ad un certo problema colle $n$ incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Se il sistema di soluzioni $X \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ è tale che non esista alcun altro sistema di soluzioni intere e positive $X' \equiv x_1', x_2', \dots, x_n'$ dello stesso problema aritmetico tale che sia:

$$x_1' \overset{=}{<} x_1 \,,\; x_2' \overset{=}{<} x_2 \,,\; \ldots \,,\; x_n' \overset{=}{<} x_n \,,$$

diremo che il sistema di soluzioni $X$ è un sistema *primario*. Ciò posto, noi dimostreremo il seguente teorema: *i sistemi primarii di valori interi e positivi degli n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che soddisfano ad un dato problema aritmetico sono sempre in numero finito.*

76. Si consideriamo, ad esempio, gli infiniti sistemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che soddisfino al problema diofanteo rappresentato da un certo numero di equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n &= 0 \qquad (\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Secondo il principio sopra enunciato, esisterà per questo sistema di equazioni un certo numero finito $\rho$ di sistemi primarii di soluzioni:

$$\begin{aligned} X' &\equiv x_1', x_2', \ldots, x_n' \\ X'' &\equiv x_1'', x_2'', \ldots, x_n'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\beta) \\ X^{(\rho)} &\equiv x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \ldots, x_n^{(\rho)}, \end{aligned}$$

cosicchè, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un altra soluzione qualunque delle $(\alpha)$ dovrà aversi per un certo valore di $i$ (compreso fra 1 e $\rho$):

$$x_1 \overset{=}{>} x_1^{(i)} \,,\; x_2 \overset{=}{>} x_2^{(i)} \,,\; \ldots \,,\; x_n \overset{=}{>} x_n^{(i)} \,,$$

onde si potrà scrivere:

$$x_1 = \xi_1 + x_1^{(i)}, \quad x_2 = \xi_2 + x_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_n + x_n^{(i)}$$

essendo le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dei numeri interi e positivi i quali soddisferanno evidentemente alle stesse equazioni $(\alpha)$.

Se il sistema delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ non coincide con uno dei sistemi $(\beta)$, esso non sarà primario e quindi si potrà porre similmente (per un certo valore di $j$ compreso fra 1 e $\rho$):

$$\xi_1 = \eta_1 + x_1^{(j)}, \quad \xi_2 = \eta_2 + x_2^{(j)}, \quad \ldots, \xi_n = \eta_n + x_n^{(j)}$$

con $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ dei pari interi e positivi e soddisfacenti alle equazioni $(\alpha)$. Così procedendo si conchiuderà evidentemente che la soluzione più generale del problema diofanteo rappresentato dalle $(\alpha)$ è data da:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'' + \ldots + \lambda_\rho x_1^{(\rho)} \\
x_2 &= \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'' + \ldots + \lambda_\rho x_2^{(\rho)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \lambda_1 x_n' + \lambda_2 x_n'' + \ldots + \lambda_\rho x_n^{(\rho)}
\end{aligned}$$

potendosi dare alle $\lambda$ valori interi e positivi affatto arbitrarii.

77. In luogo di dire che due sistemi di numeri interi e positivi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ed $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ soddisfano alle disuguaglianze:

$$x_1' \leqq x_1, \quad x_2' \leqq x_2, \quad \ldots, \quad x_n' \leqq x_n,$$

noi diremo anche più brevemente che il sistema $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ è contenuto nel sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pertanto al teorema da dimostrarsi può anche darsi la seguente forma e

$$Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

$$=\frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

Applicando ripetutamente questa formola si ottiene:

$$Q_{h_1h_2\dots h_r;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2}\,\Delta_{12}^{h_2}\,Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

e, affatto similmente, operando coll'indice 3 come si è operato coll'indice 2:

$$Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_3}\,\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;}$$

onde sostituendo nella formola precedente:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2\,\lfloor h_3}\cdot\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;\dots}$$

Così procedendo si otterrà finalmente, poichè $h_1+h_2+\dots+h_n$:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

$$=\frac{1}{\lfloor h_2\,\lfloor h_3\dots\lfloor h_r}\,\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\dots\Delta_{1n}^{h_n}\,Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2;0,\dots,0;0,0,m_3;0,\dots0;\dots}$$

In virtù di questa formola, essendo conosciuta la funzion

$$Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

restano perfettamente determinati i coefficienti del ti

(11) $$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

determinazione di uno qualunque fra essi. Ciò segue dalla (10) che in tal caso prende la forma:

$$Q_{h_1-1,h_2+1,\dots,h_n} = \frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n}$$

e dalla formola analoga:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n} = \frac{1}{h_1-1}\cdot\Delta_{21}\,Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n},$$

le quali si mostrano come, dato l'uno dei due coefficienti:

$$Q_{h_1,\dots,h_i-1,\dots,h_j+1,\dots,h_n} \quad \text{e} \quad Q_{h_1,\dots,h_i,\dots,h_j,\dots,h_n},$$

l'altro resti determinato e reciprocamente.

71. Se fra i covarianti $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$ di un certo sistema fondamentale esiste una relazione algebrica identica:

$$J(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}) = 0 \tag{13}$$

è senz'altro manifesto che questa stessa relazione sussisterà anche fra le origini $Q_0, Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ dei medesimi covarianti; poichè se nell'identità (13), in cui $J$ è simbolo di funzione intera, si pone $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, \dots, y_n = 0, \dots$, essa si cangia appunto nella identità:

$$J\left(Q_0, Q_0', Q_0'', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}\right) = 0 \tag{14}$$

Reciprocamente ad ogni relazione algebrica fra le $Q_0$, $Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ corrisponderà una relazione analoga fra $\varphi$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\lambda-1}$, come si vede scrivendo l'identità (14) pel sistema fondamentale trasformato mediante una certa sostituzione lineare (6); esprimendo quindi in essa i coefficien-

ti trasformati mediante i primitivi e sostituendo per ultimo ai coefficienti della sostituzione lineare le serie $x, y, \ldots$ $\ldots, t$ nel modo indicato all'art. 69; giacchè così facendo si otterrà la stessa relazione (14) in cui ogni origine $Q_0^{(i)}$ è surrogata a meno di un fattore, potenza di $(x\,y\,z \ldots t)$, dal corrispondente covariante $\varphi_i$.

72 - Ogni funzione razionale intera dei coefficienti del sistema fondamentale (la quale possa contenere anche altre serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ distinte dalle $n$ serie $x, y, z \ldots, t$, la quale sia isobarica, (e precisamente dello stesso peso rispetto ad ognuno degl'indici $1, 2, \ldots, n$, è l'origine di un covariante $\varphi$ di peso $-\rho$; essendo $\rho$ il grado di $Q$ rispetto alle $\xi, \eta, \ldots$. Il covariante $\varphi$ si otterrà moltiplicando per $(x\,y\,z \ldots t)^\rho$ la $Q$ costruita pel sistema fondamentale trasformato mediante la sostituzione lineare (6) nella quale poi, come all'art. 68, i coefficienti trasformati e le variabili trasformate si esprimono coi primitivi, e i coefficienti della sostituzione lineare si sostituiscono colle serie $x, y, z, \ldots t$ nel modo indicato dalle (7).

Sia infatti:

$$Q = F(a_1, b_1, \ldots; \ldots; a_n, b_n, \ldots; \xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_2, \eta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots)$$

essendo $F$ simbolo di funzione intera isobarica, come si è supposto rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$. Questa funzione è evidentemente l'origine del covariante:

$$\varphi = F(a_x, b_x, \ldots; \ldots; a_t, b_t, \ldots; (\xi y z \ldots t), (\eta y z \ldots t), \ldots; (x \xi z \ldots t), (x \eta z \ldots t), \ldots; \ldots;$$
$$; (x y z \ldots \xi), (x y z \ldots \eta), \ldots)$$

il quale si deduce da $Q$ precisamente nel modo detto sopra. Infatti indicando con $[\xi_i]$ ciò che divengono le $\xi_i$ contenute in $Q$ quando si opera anche su di esse nel modo indicato, cioè in luogo di $\xi_i$ si sostituisca la trasformata $\xi_i'$ la quale si torna poi ad esprimere colle $\xi$ e colle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ecc., si trae dalle (6), (per esempio per $i = 1$):

$$\xi_1' = \begin{vmatrix} \xi_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \xi_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix}$$

e quindi:

$$[\xi_1'] = (\xi\, y\, z \ldots t) : (x\, y\, z \ldots t)$$

ecc.

73. *Sia $\varphi$ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali, il quale possa anche contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Uno qualunque dei coefficienti è l'origine di un covariante, che non contiene più di $n$ serie di variabili, il quale si può dedurre da $\varphi$ mediante operazioni di polare fra le serie di variabili.*

Invero, siano $\xi, \eta, \ldots, \theta$ le serie di variabili contenute in $\varphi$ $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ i gradi di $\varphi$ in ciascuna di esse rispettivamente, cosicchè si potrà porre simbolicamente:

$$\varphi = A_\xi^\lambda \, B_\eta^\mu \ldots C_\theta^\nu$$

Ciò posto, un coefficiente qualunque di $\varphi$ è dato, fatta astrazione da un fattore numerico polinomide da:

$$A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \ldots A_n^{\lambda_n} B_1^{\mu_1} B_2^{\mu_2} \ldots B_n^{\mu_n} \ldots C_1^{\nu_1} C_2^{\nu_2} \ldots C_n^{\nu_n} \qquad (2).$$

ed è evidentemente l'origine della forma:

$$\psi = A_x^{\lambda_1} A_y^{\lambda_2} \ldots A_t^{\lambda_n} B_x^{\mu_1} B_y^{\mu_2} \ldots B_t^{\mu_n} \ldots C_x^{\nu_1} C_y^{\nu_2} \ldots C_t^{\nu_n}$$

contenente le sole $n$ serie $x, y, z, \ldots, t$, la quale sappiamo (Cap. I, §° X) potersi sempre dedurre dalla forma (1) mediante operazioni di polare fra le serie $x, y, z, \ldots, t, \xi, \eta, \ldots, \theta$. La forma $\psi$ è dunque una polare di $\varphi$ ed è quindi necessariamente (art. 13) un covariante del sistema fondamentale dato. L'asserto è così dimostrato.

13. *Sia come sopra, $\varphi$ un covariante il quale possa contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Se si opera su uno qualunque dei coefficienti di $\varphi$ col simbolo operativo $(i, j)$, il risultato sarà una combinazione lineare a coefficienti numerici, dei coefficienti dello stesso $\varphi$.*

E' questa una conseguenza quasi immediata della condizione differenziale:

$$(i, j)\varphi = 0$$

cui soddisfa identicamente come sappiamo (§° XII), il covariante $\varphi$. Se sia infatti:

$$\varphi = \sum_{\mu,\nu,\dots} A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}\, \xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\mu_1}\eta_2^{\mu_2}\cdots\eta_n^{\mu_n}\cdots\cdots$$

si ha:

$$(i,j)\varphi = \sum_{\mu,\nu,\dots}\left[(i,j)A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}\right]\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\cdots$$

$$+\sum_{\mu,\nu} A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}\left[(i,j)\left\{\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_n^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\right\}\right]$$

cosicchè, uguagliando a zero il coefficiente di

$$\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi^{\mu_n}\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}\cdots$$

si ha appunto per

$$(i,j)A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n\dots}$$

un'espressione della forma indicata nell'enunciato.

---

## §° XVI - *Dimostrazione di un principio generale di aritmetica* -

75 - Si indichi per brevità con $X$ uno qualunque degli infiniti sistemi di numeri interi e positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti ad un certo problema colle $n$ incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Se il sistema di soluzioni $X \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ è tale che non esista alcun altro sistema di soluzioni intere e positive $X' \equiv x_1', x_2', \dots, x_n'$ dello stesso problema aritmetico tale che sia:

$$x_1' \gtreqless x_1 \,,\; x_2' \gtreqless x_2 \,,\; \ldots \,,\; x_n' \gtreqless x_n \,,$$

diremo che il sistema di soluzioni $X$ è un sistema *primario*. Ciò posto, noi dimostreremo il seguente teorema: *i sistemi primarii di valori interi e positivi degli n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che soddisfano ad un dato problema aritmetico sono sempre in numero finito.*

76. Si consideriamo, ad esempio, gli infiniti sistemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che soddisfino al problema diofanteo rappresentato da un certo numero di equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n &= 0 \qquad (\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Secondo il principio sopra enunciato, esisterà per questo sistema di equazioni un certo numero finito $\rho$ di sistemi primarii di soluzioni:

$$\begin{aligned} X' &\equiv x_1', x_2', \ldots, x_n' \\ X'' &\equiv x_1'', x_2'', \ldots, x_n'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X^{(\rho)} &\equiv x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \ldots, x_n^{(\rho)}, \end{aligned} \qquad (\beta)$$

cosicchè, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un altra soluzione qualunque delle $(\alpha)$ dovrà aversi per un certo valore di $i$ (compreso fra 1 e $\rho$):

$$x_1 \geqq x_1^{(i)} \,,\; x_2 \geqq x_2^{(i)} \,,\; \ldots \,,\; x_n \geqq x_n^{(i)} \,,$$

onde si potrà scrivere:

$$x_1 = \xi_1 + x_1^{(i)}, \quad x_2 = \xi_2 + x_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_n + x_n^{(i)}$$

sendo le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dei numeri interi e positivi i quali soddisferanno evidentemente alle stesse equazioni ($\alpha$).

e il sistema delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ non coincide con uno dei istemi ($\beta$), esso non sarà primario e quindi si potrà porre nilmente (per un certo valore di $j$ compreso fra 1 e $\rho$):

$$\xi_1 = \eta_1 + x_1^{(j)}, \quad \xi_2 = \eta_2 + x_2^{(j)}, \quad \ldots, \xi_n = \eta_n + x_n^{(j)}$$

n $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ del pari interi e positivi e soddisfacenti al equazioni ($\alpha$). Così procedendo si conchiuderà evidentemen che la soluzione più generale del problema diofanteo rap resentato dalle ($\alpha$) è data da:

$$x_1 = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'' + \ldots + \lambda_\rho x_1^{(\rho)}$$
$$x_2 = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'' + \ldots + \lambda_\rho x_2^{(\rho)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \lambda_1 x_n' + \lambda_2 x_n'' + \ldots + \lambda_\rho x_n^{(\rho)}$$

ttendosi dare alle $\lambda$ valori interi e positivi affatto arbi rarii.

!. In luogo di dire che due sistemi di numeri interi e po sitivi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ed $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ soddisfano alle suguaglianze:

$$x_1' \overset{=}{<} x_1, \quad x_2' \overset{=}{<} x_2, \quad \ldots, \quad x_n' \overset{=}{<} x_n,$$

si diremo anche più brevemente che il sistema $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ contenuto nel sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pertanto al teore a da dimostrarsi può anche darsi la seguente forma e

quivalente: *fra gl'infiniti sistemi di n numeri interi e positivi, costituenti un certo insieme ben determinato di sistemi, quelli che godono della proprietà di essere primarii (cioè di non contenere centro di sè alcun altro sistema appartenente allo stesso insieme) sono necessariamente in numero finito.*

Noi supporremo questo teorema già dimostrato per i sistemi di $n-1$ numeri, ed in tale supposto faremo vedere che esso è valido anche per un insieme $(A)$ di cui un elemento qualunque, che indicheremo genericamente con $A$ od $A_i$, sia un sistema di $n$ valori interi e positivi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Se da ogni sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ appartenente ad $(A)$ cancelliamo il primo valore $\alpha_1$, otteniamo un sistema di soli $n-1$ valori $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Si indichi con $(B)$ l'insieme di tutti gl'infiniti sistemi $B \equiv \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ che si possono in tal modo dedurre dagl'infiniti sistemi di $(A)$. Esisteranno, per quanto si è supposto già dimostrato, fra i sistemi $B$, certi $N$ sistemi speciali:

$$B_1, B_2, \ldots, B_N \qquad (1)$$

tali che in ogni sistema $B$ ne sia contenuto almeno uno. Sieno:

$$\alpha_1', B_1; \quad \alpha_1'', B_2; \ldots\ldots; \alpha_1^{(N)}, B_N \qquad (2)$$

quei sistemi $A$ che hanno dato origine rispettivamente ai sistemi (1). Ove lo stesso sistema $B_i$ potesse nascere da dif.

ferenti sistemi $A$, gioverà preferire quello pel quale $\alpha_1^{(i)}$ ha il valore minimo

Ciò posto, se $\omega$ è il massimo fra gli $N$ numeri $\alpha_1', \alpha_1'', \ldots, \alpha_1^{(N)}$, è chiaro che tutti quei sistemi $A$, in cui il primo valore $\alpha_1$ è uguale o superiore ad $\omega$, conterranno entro di sè almeno uno dei sistema (2). Ci resta dunque soltanto ad occuparci dei sistemi $A$ pei quali $\alpha_1 < \omega$. Essi potranno ripartirsi in $\omega$ gruppi, od insieme inferiori, secondochè sia $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_1 = \omega - 1$.

Ma, se indichiamo con $(B_i)$ l'insieme di tutti quei sistemi $B$ che nascono da quei sistemi $A$ nei quali $\alpha_1$ ha il valore $i$, esisterà anche per esso (componendosi i suoi sistemi di soli $n-1$ valori) un certo numero finito di sistemi speciali:

$$B_1^{(i)}, \; B_2^{(i)}, \ldots, B_{N_i}^{(i)}$$

compresi fra i sistemi di $(B_i)$ e tali che almeno uno di essi sia contenuto in ogni sistema di $(B_i)$. Pertanto tutti i sistemi di $(A)$ pei quali $\alpha_1 = i$, conterranno necessariamente almeno uno dei sistemi:

$$i, B_1^{(i)}; \quad i, B_2^{(i)}, \ldots\ldots, i, B_{N_i}^{(i)}$$

i quali tutti fanno parte essi stessi dell'insieme $(A)$.

Il nostro asserto si trova così dimostrato completamente, poichè da quanto si è detto risulta che il numero di quei sistemi di $(A)$, che godono della proprietà di essere

primarii, è finito e non può superare:

$$N + N_0 + N_1 + \cdots + N_{\omega-1}$$

---

## §° XVII. *Sopra un processo di riduzione delle funzioni razionali intere di n variabili.*

78. Un termine qualunque:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

di una funzione razionale intera delle $n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è caratterizzato dal sistema dei valori che si attribuiscono agli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e questi sistemi, benchè in numero $\infty^n$, si possono sempre far corrispondere univocamente ai numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$ Si viene così a stabilire un ordine di successione perfettamente determinato fra gl'infiniti termini (1), che si potranno per conseguenza rappresentare brevemente colla successione infinita:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots\ldots$$

Se

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n} = X_i,$$

per esprimere che $i$ è una funzione aritmetica ben determinata delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, scriveremo:

$$i = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

e diremo poi che $i$ è il rango del termine $X_i$.

Una funzione intera qualunque delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, or-

dinata secondo il rango dei suoi termini, sarà della forma.

$$F = a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + \cdots + a_{k-1} X_1 + a_k X_0$$

essendo le $a$ dei coefficienti costanti. Il coefficiente $a_0$, cioè il coefficiente del termine di rango più elevato, si dirà il *primo coefficiente* di $F$, e il numero $k$, rango del primo termine di $F$, si dirà al tempo stesso essere il *rango di* $F$.

Ciò posto, noi supporremo in ciò che segue che la legge, secondo la quale viene fissato il rango di ognuno degl'infiniti termini (1), sia stata scelta in modo che: se sia $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] < [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, sia anche $[\alpha_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \gamma_2, \ldots, \alpha_n + \gamma_n] < [\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \ldots, \beta_n + \gamma_n]$ qualunque siano i valori degl'interi positivi o nulli $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. E' facile riconoscere come si possa definire il valore di $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ in modo che sia poi sempre soddisfatta questa proprietà.

A tale oggetto basterà stabilire il criterio di $>$ e $<$ fra due numeri qualunque $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ e $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ come segue:

a) se sia $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, si definirà:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] > [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n].$$

b) se $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, e sia $\beta_i$ il primo dei numeri $\beta_1, \beta_2, \ldots$ che non coincide col corrispondente $\alpha_i$ si definirà:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \gtrless [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n],$$

secondochè si abbia rispettivamente $a_i \gtrless \beta_i$.

80. Data una successione di $h$ funzioni intere delle $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$:

$$f_1 , f_2 , \ldots , f_k \qquad (2)$$

ed un'altra funzione intera $\varphi$; noi definiremo, come segue, una nuova funzione $\bar{\varphi}$ *univocamente determinata* (che potrà anche coincidere in qualche caso particolare colla stessa $\varphi$) che chiameremo la *ridotta di $\varphi$ rispetto alla successione* (2).

Supponiamo che $\varphi$ contenga almeno una delle funzioni (2) e sia $f_i$ la prima di esse che è contenuta in $\varphi$. Con ciò vogliamo intendere, per brevità, che, se $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ sia il primo termine di $f_i$ ed $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ il primo termine di $\varphi$, debba essere:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1 , \quad \alpha_2 \leqq \beta_2 , \quad \ldots , \alpha_n \leqq \beta_n .$$

Sieno

$$f_i \equiv a_0 X_\mu + a_1 X_{\mu-1} + \cdots , \quad \varphi \equiv b_0 X_\lambda + b_1 X_{\lambda-1} + \cdots$$

le due funzioni $f_i$ e $\varphi$ ordinate secondo i ranghi decrescenti dei loro termini. Poichè, per supposto, $\varphi$ contiene $f_i$, esisterà un certo termine $X_\nu$ tale da aversi:

$$X_\lambda = X_\mu X_\nu$$

La nuova funzione:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi - \frac{b_0}{a_0} X_\nu f_i &= b_1 X_{\lambda-1} + b_2 X_{\lambda-2} + \cdots \\ &\quad - \frac{b_0}{a_0} a_1 X_{\mu-1} X_\nu - \frac{b_0}{a_0} a_2 X_{\mu-2} X_\nu - \cdots \\ &= b_0' X_{\lambda'} + b_1' X_{\lambda'-1} + \cdots \end{aligned}$$

sarà di rango inferiore a $\lambda$. Infatti poichè $X_{\mu-\rho}$ è inferiore ad $X_\mu$, sarà, per l'articolo precedente, $X_{\mu-\rho} X_\nu$

inferiore ad $X_\mu X_\nu$, cioè inferiore ad $X_\lambda$. Diremo che $\varphi_1$ è la prima ridotta di $\varphi$ rispetto alla successione (2).

Si determini analogamente, se $\varphi_1$ contenga alcuna delle (2), la prima ridotta di $\varphi_1$ rispetto alle (2), che chiameremo seconda ridotta di $\varphi$ rispetto alla successione (2) e indicheremo con $\varphi_2$. Così procedendo si giungerà evidentemente ad una certa ridotta $\varphi_k$ di $\varphi$, che chiameremo l'ultima ridotta o semplicemente la ridotta $\bar{\varphi}$ di $\varphi$ rispetto alla successione (2), la quale, o sarà costante ed eguale allo zero, o godrà della proprietà di non contenere nessuna delle $h$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_h$. In ogni caso discende manifestamente dal procedimento tenuto che si avrà identicamente:

$$\varphi = \bar{\varphi} + F_1 f_1 + F_2 f_2 + \cdots + F_h f_h ,$$

essendo le $F_1, F_2, \ldots, F_h$ certe funzioni razionali intere delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

## §° XVIII. *Teorema di Hilbert.*

31. Dalle cose stabilite nei due precedenti §§, possiamo dedurre facilmente il seguente teorema dovuto ad Hilbert:(*)

---

(*) Cfr. *Mathematische Annalen*: Bd. 36. La dimostrazione qui data, differente da quella di Hilbert, ha il vantaggio di contenere al tempo stesso un procedimento metodico per la determinazione effettiva delle forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Se

$$f_1 , f_2 , f_3 , \ldots \tag{1}$$

è una successione infinita di funzioni razionali intere ben determinate delle $n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, esiste un numero finito $k$ pel quale si ha identicamente, qualunque sia $i$:

$$f_i = \Phi_1^{(i)} f_1 + \Phi_2^{(i)} f_2 + \ldots + \Phi_k^{(i)} f_k$$

essendo le $\Phi^{(i)}$ delle funzioni razionali intere delle stesse $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Invero, sia $\bar{f}_2$ la ridotta di $f_2$ rispetto ad $f_1$, sia $\bar{f}_3$ la ridotta di $f_3$ rispetto alla successione $f_1, \bar{f}_2$; similmente sia $\bar{f}_4$ la ridotta di $f_4$ rispetto alla successione $f_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, e così di seguito. Dico che un certo valore di $k$ in poi sarà costantemente:

$$\bar{f}_k = 0, \quad \bar{f}_{k+1} = 0, \quad \bar{f}_{k+2} = 0, \ldots \tag{2}$$

Infatti, ove così non fosse, i primi termini di quelle fra le $\bar{f}_i$, che non sono identicamente nulle, formerebbero una successione di infiniti termini:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} , \quad x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} , \ldots , x_n^{\beta_n} , \ldots$$

tale che un termine qualunque non conterrebbe alcuno dei termini precedenti. Ora ciò è contrario a quanto si è già stabilito al §. XVI che, cioè, fra gl'infiniti sistemi di $n$ valori

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \; ; \; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \; ; \ldots$$

ne ha un certo numero finito (quelli primarii) tali che, di
i, almeno uno è contenuto in ognuno dei rimanenti infi-
ti sistemi.

- Ciò posto, essendo $k$ il numero definito come sopra, l'i-
ntità:

$$f_i = \bar{f}_i + \psi_1^{(i)}\bar{f}_1 + \psi_2^{(i)}\bar{f}_2 + \cdots + \psi_{i-1}^{(i)}\bar{f}_{i-1} \qquad (3)$$

si avrebbe, secondo quanto si è notato in fine del §
cedente, per ogni valore di $i$, si ridurrà, per $i \geqq k$, al-
espressione più semplice:

$$f_i = \psi_1^{(i)}\bar{f}_1 + \psi_2^{(i)}\bar{f}_2 + \cdots + \psi_{k-1}^{(i)}\bar{f}_{k-1} \quad , \quad i \geqq k \qquad (4)$$

altra parte le identità (3) ci dànno, per $i < k$, le relazioni
uliche:

$$f_2 = \bar{f}_2 + \psi_1^{(2)}\bar{f}_1$$

$$f_3 = \bar{f}_3 + \psi_1^{(3)}\bar{f}_1 + \psi_2^{(3)}\bar{f}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{k-1} = \bar{f}_{k-1} + \psi_1^{(k-1)}\bar{f}_1 + \psi_2^{(k-1)}\bar{f}_2 + \cdots + \psi_{k-2}^{(k-1)}\bar{f}_{k-2}.$$

quali, risolute rispetto alle $\bar{f}_2, \bar{f}_3, \ldots, \bar{f}_{k-1}$, ci permettono
tentemente di porre ciascuna di quest'ultime sotto la
ma:

$$\Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2 + \cdots + \Psi_{k-1} f_{k-1}$$

endo ancora le $\Psi$ funzioni razionali intere delle $x_1,$
$\ldots, x_n$. Se dunque si sostituiscono queste ultime e-
pressioni nella (4) in luogo delle $\bar{f}_2, \bar{f}_3, \ldots, \bar{f}_{k-1}$, si otter-
appunto l'identità della forma desiderata

$$f_i = \Phi_1^{(i)} f_1 + \Phi_2^{(i)} f_2 + \cdots + \Phi_{k-1}^{(i)} f_{k-1}$$

valida per tutti i valori di $i$, c.d.d.

---

## §° XIX. *Dimostrazione dell'esistenza dei sistemi finiti completi di covarianti.*

83. Un sistema finito di covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ appartenenti ad un dato sistema di forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots$ si dice completo quando ogni covariante del sistema delle $f_1 f_2 \ldots$ si può esprimere come una funzione razionale intera (o coefficienti numerici) dei $k$ covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. L'esistenza di un sistema completo cosiffatto è stata stabilita dal Gordan nel campo binario con un procedimento che dà al tempo stesso un metodo per la costruzione effettiva dei covarianti che lo compongono. La dimostrazione dell'esistenza del sistema completo anche pel campo ennario è stata poi data molto più recentemente da Hilbert in base al teorema da noi dato nel precedente §°. La dimostrazione che siamo per darne qui non differisce, nei punti più importanti ed essenziali, da quella di Hilbert.(*)

84. Noi ci limiteremo, per semplicità, al caso di un'unica forma fondamentale $f$ con una sola serie di variabili

---

(*) Cfr. l.c.

$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$; ma la dimostrazione che daremo si estende immediatamente anche al caso di più forme fondamentali, ciascuna delle quali possa anche contenere più serie cogredienti alla serie $x$. Noi considereremo tutte le forme invariantive contenenti certe serie di variabili cogredienti $x, y, z, \ldots$, il cui numero $q$ potrà fissarsi ad arbitrio; limitandoci dapprima a quelle di peso positivo. Tutte queste infinite forme si potranno sempre rappresentare come gli elementi di una successione infinita ben determinata:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

ordinandole per es. a seconda dei loro gradi nei coefficienti della forma fondamentale $f$, e nelle variabili; e ritenendo, per ogni dato grado, soltanto quelle, in numero finito, che sono fra loro linearmente indipendenti.

85. Se $\tau_i$ è il peso di una qualunque $\varphi_i$, e, indicando brevemente secondo il solito con $(\xi\ \eta\ \zeta \ldots \theta)$ il determinante formato con $n$ nuove serie di variabili ausiliarie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \theta$ affatto indipendenti dalle $x, y, z, \ldots$ poniamo:

$$\psi_i = (\xi\ \eta\ \zeta \ldots \theta)^{\tau_i} \cdot \varphi_i, \tag{2}$$

gioverà considerare dapprima in luogo della successione (1) la successione:

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{3}$$

i cui elementi sono covarianti, di peso nullo (poichè $(\xi\ \eta\ \zeta\ \theta)$ è un covariante di peso $-1$) contenenti le serie cogredien-

ti $x, y, z; \ldots; \xi, \eta, \zeta, \ldots, \theta$.

Se si ponga simbolicamente

$$f = a_x^m$$

e si indichino con

$$P_1, P_2, \ldots, P_N$$

le polari miste di $f$ rappresentate simbolicamente dal tipo generale

$$a_x^{\mu} a_y^{\mu'} a_z^{\mu''} \ldots a_\xi^{\nu} a_\eta^{\nu'} \ldots, \qquad \sum\mu + \sum\nu = m,$$

il cui numero $N$ è dato manifestamente da:

$$\binom{m+q+n-1}{m}$$

è facile di riconoscere che *una qualunque delle* $\psi$ *si può esprimere come funzione razionale intera delle* $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Siano infatti $a, b, c, \ldots$ simboli fra loro equivalenti; cosicchè si possa scrivere:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \ldots$$

Un covariante qualunque $\varphi_i$, si potrà esprimere (§. XIII) come un aggregato razionale intero di elementi dei tipi:

$$a_x, a_y, a_z, \ldots, b_x, b_y, b_z, \ldots \qquad (4)$$

e di elementi dei tipi:

$$(a\,b\,c \ldots d), (x\,y \ldots t), \ldots$$

ed in ogni termine di cosiffatta espressione il numero dei fattori del tipo $(a\,b\,c \ldots d)$ dovrà superare di $\tau_i$ unità, giacchè $\tau_i$ è il peso di $\varphi_i$, il numero dei fattori del tipo $(x\,y \ldots t)$, cosic-

chè ogni fattore di questo secondo tipo si potrà accoppiare con un fattore del primo tipo ed in luogo di ogni prodotto del tipo $(a\ b\ c \ldots d)(x\ y \ldots t)$ così ottenuto si potrà sostituire l'espressione:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & \cdot & \cdot & \cdot & a_t \\ b_x & b_y & \cdot & \cdot & \cdot & b_t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_x & d_y & \cdot & \cdot & \cdot & d_t \end{vmatrix}$$

che gli è identicamente uguale. In tal modo $\varphi_i$ si verrà ad esprimere con elementi del tipo (4) e con elementi del tipo $(a\ b \ldots d)$. E poichè in ogni termine dell'espressione vi saranno precisamente $\tau_i$ fattori del tipo $(a\ b \ldots d)$, è chiaro che $(\xi\ \eta\ \zeta \ldots \theta)^{\tau_i} \varphi_i$, cioè $\psi_i$, si potrà esprimere come aggregato razionale intero di soli elementi dei tipi:

$$\begin{matrix} a_x\ ,\ a_y\ ,\ a_z\ ,\ \ldots\ ,\ a_\xi\ ,\ a_\eta\ ,\ \ldots \\ b_x\ ,\ b_y\ ,\ b_z\ ,\ \ldots\ ,\ b_\xi\ ,\ b_\eta\ ,\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \qquad (5)$$

giacchè ogni fattore del tipo $(a\ b \ldots d)$ si potrà accoppiare con un fattore $(\xi\ \eta \ldots \theta)$ e surrogare coll'espressione equivalente:

$$\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & \cdot & \cdot & \cdot & a_\theta \\ b_\xi & b_\eta & \cdot & \cdot & \cdot & b_\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_\xi & d_\eta & \cdot & \cdot & \cdot & d_\theta \end{vmatrix}$$

La $\psi_i$ si verrà così appunto ad esprimere, secondo che si è asserito, come una funzione intera delle $P_1, P_2, \ldots, P_N$, giacchè ogni prodotto di elementi (4), contenente ciascuno dei simboli $a, b, c, \ldots$ alla potenza $m$, è un prodotto di forme del tipo:

$$\begin{matrix} a_x^{\mu} & a_y^{\mu'} & a_z^{\mu''} & \ldots & a_\xi^{\nu} & a_\eta^{\nu'} \\ b_x^{\mu} & b_y^{\mu'} & b_z^{\mu''} & \ldots & b_\xi^{\nu} & b_\eta^{\nu'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \quad , \sum \mu + \sum \nu = m$$

cioè appunto un prodotto di forme $P_i$.

86 - Applicando ora il teorema del precedente §° alla successione delle infinite funzioni $\psi$, considerate come funzioni razionali intere delle $N$ variabili $P_1, P_2, \ldots, P_N$, possiamo ritenere che fra le funzioni $\psi$ ne esistano $k$, mediante le quali si possano esprimere tutte le altre secondo una identità della forma:

$$\psi_i = \psi_1 \chi_1^{(i)} + \psi_2 \chi_2^{(i)} + \ldots + \psi_k \chi_k^{(i)}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, \quad (6)$$

essendo le $\chi$ funzioni razionali intere, a coefficienti numerici, delle stesse $P_1, P_2, \ldots P_N$.

Rimettendo poi in luogo delle $\psi$ le loro espressioni (2) ed operando quindi sui due membri di (6) colla potenza $r_i^{esima}$ dell'operazione

$$\Omega \equiv \sum \pm \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta_n}$$

si può scrivere:

$$\Omega^{\tau_i}(\xi\,\eta\ldots\theta)^{\tau_i} = \sum_{\rho=1}^{\rho=k} \varphi_\rho \left\{ \Omega^{\tau_i}\left[(\xi\,\eta\ldots\theta)^{\tau_\rho}\chi_\rho^{(i)}\right]\right\}, \qquad (7)$$

tenendo presente (Cap. I, §° XVIII) che:

$$\Omega = \frac{1}{(\xi\,\eta\ldots\theta)} H_{\xi\eta\ldots\theta} \quad ,$$

:

$$H_{\xi\eta\ldots\theta} = \begin{vmatrix} n-1+\mathcal{D}_{\theta\theta} & \ldots & \mathcal{D}_{\eta\theta} & \mathcal{D}_{\xi\theta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{\theta\eta} & \ldots & 1+\mathcal{D}_{\eta\eta} & \mathcal{D}_{\xi\eta} \\ \mathcal{D}_{\theta\xi} & \ldots & \mathcal{D}_{\eta\xi} & \mathcal{D}_{\xi\xi} \end{vmatrix} ,$$

ile riconoscere che:

$$\Omega^{\tau_i}(\xi\,\eta\ldots\theta)^{\tau_i} = \lambda ,$$

do $\lambda$ un numero diverso da zero e precisamente(*):

$$\lambda = 1^{\bar{n}} \cdot 2^{\bar{n}} \cdot 3^{\bar{n}} \ldots \tau_i^{\bar{n}} .$$

) ci dà dunque:

$$\varphi_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{\rho=1}^{\rho=k} \varphi_\rho \cdot \Phi_\rho \qquad (8)$$

:

$$\Phi_\rho = \Omega^{\tau_i}\left[(\xi\,\eta\ldots\theta^{\tau_\rho})\chi_\rho^{(i)}\right] \qquad (9)$$

---

ottiamo per le potenze fattoriali la notazione:

$$x^{\bar{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$$

è un covariante della forma fondamentale $f$; poichè $\chi_\rho^{(1)}$ e quindi anche $(\xi\,\eta\cdots\theta)^{\tau_\rho}\chi_\rho^{(1)}$, è già un covariante di $f$, e l'operazione $\Omega$ non toglie mai (cfr. art. 14) il carattere invariantivo alle forme cui viene applicata.

La formola (8) esprime $\varphi_i$ in funzione dei $k$ covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ e dei covarianti $\Phi_\rho$ i quali, al pari della $\varphi_i$, possono contenere soltanto le $q$ serie di variabili $x, y, z, \ldots$ ed hanno il loro grado complessivo nei coefficienti di $f$ e nelle variabili, evidentemente inferiore al grado di $\varphi_i$. Si potrà quindi applicare a ciascuna delle $\Phi_\rho$ la stessa riduzione fatta per la $\varphi_i$, e procedere dipoi allo stesso modo finchè la $\varphi$ si trovi espressa come un aggregato razionale intero delle sole $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Queste $k$ forme costituiscono dunque il sistema completo di tutti i covarianti $\varphi$ appartenenti alla forma fondamentale $f$.

87. In modo affatto analogo si potranno trattare quei covarianti

$$\varphi_1', \quad \varphi_2', \quad \varphi_3', \quad \ldots \qquad (1)'$$

che sono di peso negativo. Basterà introdurre ausiliarmente $n$ nuove serie arbitrarie $u, v, \ldots, w$ controgredienti a le $x, y, z, \ldots$ e considerare dapprima, in luogo della serie (1)', la serie:

$$\psi_1', \quad \psi_2', \quad \psi_3', \quad \ldots \qquad (3)'$$

dove:

$$\psi_i' = (u\, v \ldots w)^{\tau_i} \varphi_i' \,, \qquad (2)'$$

essendo $-\tau_i$ il peso di $\varphi_i'$. Le $\psi'$ saranno allora esprimibili come aggregati razionali interi degli $nq$ covarianti identici

$$\begin{array}{cccc} u_x \,, & u_y \,, & u_z \,, & \ldots \\ v_x \,, & v_y \,, & v_z \,, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_x \,, & w_y \,, & w_z \,, & \ldots \end{array}$$

e delle $\binom{m+q-1}{m}$ polari di $f$ contenute nel tipo generale

$$a_x^{\mu}\, a_y^{\mu'}\, a_z^{\mu''} \ldots \,, \qquad \sum \mu = m \,.$$

Se $N = nq + \binom{m+q-1}{m}$ forme di questi due tipi s'indicheranno ancora con $P_1, P_2, \ldots, P_N$ e si applicherà il teorema del §° prec. alla successione delle $\psi'$ considerate come funzioni delle $N$ variabili $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Il resto della dimostrazione procederà assolutamente come nell'art. prec. colla sola differenza che, in luogo dell'operazione:

$$\sum \pm \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta_n} \,,$$

converrà valersi dell'operazione:

$$\sum \pm \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial}{\partial w_n} \,.$$

Riassumendo concludiamo dunque che: *tutte le forme invariantive razionali intere, contenenti un certo numero (da fissarsi però ad arbitrio) di serie di variabili cogredienti, ap-*

*partenenti a una forma fondamentale* $n^{\text{aria}}$ *si esprimono come un aggregato razionale intero di un numero finito di esse.*

# APPENDICE

## sulle

# *Forme algebriche binarie*

## §° I. *Formole di riduzione nel campo binario.*

- Nella rappresentazione simbolica caratteristica delle forme invariantive binarie avremo a considerare elementi del tipo $a_x$ ed elementi del tipo $(ab)$ od $(xy)$ formati colle serie binarie di variabili $x_1, x_2 ; y_1, y_2 ; \ldots$ e colle serie binarie di simboli $a_1, a_2 ; b_1, b_2 ; \ldots$

Fra gli elementi di questi tipi si hanno primieramente (Cap. II, §° XII) le relazioni identiche:

$$(xy)(ab) = a_x b_y - a_y b_x = (a_x b_y) \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$(bc)ax = (ac)b_x + (ba)c_x \qquad \text{(III)}$$

$$(bc)(ad) = (ac)(bd) + (ba)(cd) . \qquad \text{(IV)}$$

- Dalla formola (III) scritta come segue:

$$(ba)c_x = (bc)a_x - (ac)b_x ,$$

levandosi al quadrato i due membri, si deduce facilmente che:

$$(ac)(bc)a_x b_x = \frac{1}{2}\left\{(ac)^2 b_x^2 + (bc)^2 a_x^2 - (ab)^2 c_x^2\right\} \qquad \text{(V)}$$

e ponendo $x_1 = d_1$, $x_2 = -d_1$:

$$(ac)(bc)(ad)(bd) = \frac{1}{2}\left\{(ac)^2(bd)^2 + (bc)^2(ad)^2 - (ab)^2(cd)^2\right\} \quad \text{(VI)}$$

3. Elevando ora al quadrato anche i due membri delle (V), se ne deduce ulteriormente:

$$(ab)^2(ac)^2 b_x^2 c_x^2 + (ba)^2(bc)^2 a_x^2 c_x^2 + (ca)^2(cb)^2 a_x^2 b_x^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ac)^4 b_x^4 + (bc)^4 a_x^4 + (ab)^4 c_x^4\right\}, \quad \text{(VII)}$$

e quindi anche, ponendo, come sopra, $x_1 = d_1$, $x_2 = -d_1$:

$$(ab)^2(dc)^2(bd)^2(cd)^2 + (ba)^2(bc)^2(ad)^2(bd)^2 + (ca)^2(cb)^2(ad)^2(bd)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ac)^4(bd)^4 + (bc)^4(ad)^4 + (ab)^4(cd)^4\right\} \quad \text{(VIII)}$$

4. Per ultimo citeremo anche la formola seguente:

$$(ab)(cd)a_x b_x c_x d_x = \frac{1}{2}\left\{(ad)^2 b_x^2 c_x^2 + (bc)^2 a_x^2 d_x^2 - (ac)^2 b_x^2 d_x^2 - (bd)^2 a_x^2 c_x^2\right\} \quad \text{(IX)}$$

colla sua correlativa:

$$(ab)(cd)(ae)(be)(ce)(de) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ad)^2(be)^2(ce)^2 + (bc)^2(ae)^2(de)^2 - (ac)^2(be)^2(de)^2 - (bd)^2(ae)^2(ce)^2\right\} \quad \text{(X)}$$

e così pure la formola:

$$(au)(av)(bc)(bd)(cg) =$$
$$(bu)(bv)(ac)(ad)(cg) + (cu)(cv)(ab)(ad)(bg) + (ab)(bc)(ac)(ud)(vg) \quad \text{(XI)}$$

che si dedurrà facilmente dall'identità:

$$(a-u)(a-v)(b-c) = (b-u)(b-v)(a-c) + (c-u)(c-v)(a-b) + (a-b)(a-c)(b-c).$$

---

## §° II. Sviluppo di Clebsch e Gordan

5. Le forme algebriche binarie con due o più serie di variabili si fanno dipendere da forme binarie con un'unica serie di variabili mediante lo sviluppo per polari (Cap. I, §. XXII)

In luogo degli operatori da noi già considerati:

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{D}_{yx} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \Omega_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}$$

è però spesso utile, allo scopo di semplificare certi coefficienti numerici, di servirsi degli operatori preparati:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy}$$

definiti dalle relazioni identiche:

$$\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xx} \cdot \overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yy} \cdot \overline{\mathcal{D}}_{yx}$$

$$\Omega_{xy} = \mathcal{D}_{xx} \mathcal{D}_{yy} \overline{\Omega}_{xy},$$

In altri termini:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy} = \frac{1}{\mu} \mathcal{D}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx} = \frac{1}{\nu} \mathcal{D}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy} = \frac{1}{\mu\nu} \Omega_{xy},$$

essendo $\mu, \nu$ i gradi, risp. nelle $x$ e nelle $y$, della forma algebrica cui s'intendono applicati i simboli operativi.

Così se $f = a_x^m b_y^n$ è la forma simbolica di una forma binaria con due serie di variabili $x$ ed $y$, in luogo delle formole:

$$\mathcal{D}_{xy} f = m a_x^{m-1} a_y b_y^n, \quad \mathcal{D}_{xz} f = n a_x^m b_y^{n-1} b_x,$$

$$\Omega_{xy} f = mn(ab) a_x^{m-1} b_y^{n-1},$$

si scriveranno le formole più semplici:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy} f = a_x^{m-1} a_y b_y^n, \quad \overline{\mathcal{D}}_{xz} f = a_x^m b_y^{n-1} b_x, \quad \overline{\Omega}_{xy} f = (ab) a_x^{m-1} b_y^{n-1}$$

6. Ciò premesso, designando per maggiore brevità gli operatori $\overline{\mathcal{D}}_{xy}, \overline{\mathcal{D}}_{yx}, \overline{\Omega}_{xy}$ rispettivamente con $\mathcal{D}, \Delta, \Omega$, allo sviluppo

luppo per polari (cfr. Cap. I, §° XXII) di una forma binaria con due serie di variabili:

$$f(\overset{m}{x}\,;\,\overset{n}{y}) = a_x^{\,m}\,\alpha_y^{\,n} \tag{1}$$

si può dare la forma:

$$f = D^n E_0 + \mu_1 (xy) D^{n-1} E_1 + \mu_2 (xy)^2 D^{n-2} E_2 + \cdots + \mu_n (xy)^n E_n \tag{2}$$

essendo le $E_i$ i così detti covarianti elementari di $f$ definiti simbolicamente da:

$$E_i = (a\,\alpha)^i\, a_x^{\,m-i}\, \alpha_x^{\,n-i} \tag{3}$$

e operativamente da

$$E_i = \Delta^{n-i}\, \Omega^i f \tag{3'}$$

e le $\mu$ dei coefficienti numerici da determinarsi opportunamente. Quest'ultima espressione mette in evidenza che per $E_i$ si deve intendere lo zero tutte le volte che l'indice $i$ sia maggiore di $m$ o di $n$; cosicchè per $m < n$ lo sviluppo (2) si arresterà al termine con $E_m$.

7. *Lo sviluppo di una stessa forma $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ sotto la forma:*

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0 + (xy) D^{n-1} G_1 + (xy)^2 D^{n-2} G_2 + \cdots \tag{$\alpha$}$$

*in cui le $G$ siano forme contenenti la sola serie $x$, non può effettuarsi che in un unico modo (cioè secondo lo sviluppo (2) in cui le $E$ sono le (3) o le equivalenti (3)').*

Ammesso in fatti che si avesse anche:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0' + (xy) D^{n-1} G_1' + (xy)^2 D^{n-2} G_2' + \cdots \tag{$\beta$}$$

seguirebbe evidentemente dalle ($\alpha$) e ($\beta$) facendo in esse $x_1 = y_1$ ed $x_2 = y_2$, onde $(xy) = 0$:

$$\left[D^n G_0\right]_{y=x} = \left[D^n G_0'\right]_{y=x}$$

:

$$G_0 = G_0' ,$$

chè $G_0$ e $G_0'$ contengono la sola serie $x$; cosicchè:

$$\left[\overline{D_{xy}^n}\, G_0\right]_{y=x} = G_0 \quad , \quad \left[\overline{D_{xy}^n}\, G_0'\right]_{y=x} = G_0' .$$

ndo ora $G_0 = G_0'$ e quindi anche $D^n G_0 = D^n G_0'$, si deduce dalla

e $(\beta)$:

$$D^{n-1} G_1 + (xy) D^{n-2} G_2 + \cdots = D^{n-1} G_1' + (xy) D^{n-2} G_2' + \cdots$$

nde si trova come sopra, facendo $x_1 = y_1$ ed $x_2 = y_2$:

$$G_1 = G_1'$$

uindi

$$D^{n-1} G_1 = D^{n-1} G_1' ,$$

chè resterà l'identità:

$$D^{n-2} G_2 + (xy) D^{n-3} G_3 + \cdots = D^{n-2} G_2' + (xy) D^{n-3} G_3' + \cdots$$

si via.

Se $f(\overset{n}{x}; \overset{n}{y})$ è simmetrica nelle $x$ ed $y$, cioè se è identica-

ità $f(x;y) = f(y;x)$, lo sviluppo per polari prende la for-

più semplice:

$$f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0 + (xy)^2 D^{n-2} G_2 + (xy)^4 D^{n-4} G_4 + \cdots$$

atti, poichè:

$$f = a_x^n \alpha_y^n = a_y^n \alpha_x^n ,$$

è:

$$\Delta^{n-1}\overline{\Omega}^{i}_{xy} f = \Delta^{n-1}\overline{\Omega}^{i}_{xy}\left\{\alpha_x^{n} a_y^{n}\right\} = (\alpha a)^{i}\, \alpha_x^{n-i}\, a_x^{n-i}$$

cioè per le (3)' e (3):

$$E_i = (-1)^i E_i$$

d'onde appunto $E_i = 0$ per il numero dispari.

---

## §° III. *Determinazione dei coefficienti $\mu$ nell'sviluppo del precedente §°.*

9. Applicando l'operazione $\Omega$ definita nel §° precedente a prodotto della forma:

$$(xy)^{\lambda} \cdot \varphi(\overset{\rho}{x}; \overset{\sigma}{y})$$

in cui $\lambda$ è un esponente intero positivo, si trova con facile c colo:

$$\Omega\left\{(xy)^{\lambda}\varphi(\overset{\rho}{x};\overset{\sigma}{y})\right\} = \frac{\rho\sigma}{(\rho+\lambda)(\sigma+\lambda)}(xy)^{\lambda}\cdot\Omega\varphi + \frac{\lambda(\rho+\sigma+\lambda+1)}{(\rho+\lambda)(\sigma+\lambda)}(xy)^{\lambda-1}\varphi$$

Pertanto, se si applica l'operatore $\Omega$ ad un termine qualu dello sviluppo (2) del §° precedente, si ha:

$$\Omega\left\{\mu_i (xy)^i D^{n-i} E_i\right\} = \mu_i \frac{m+n-i+1}{mn}(xy)^{i-1} D^{n-i} E_i .$$

poichè:

$$\Omega\left\{D^{n-i} E_i\right\} = 0 ,$$

essendo evidentemente:

$$\Omega E_i = 0$$

ed essendo l'operatore $\Omega$ permutabile (a meno di un coef ciente costante) con $D$.

Dallo sviluppo (2) del §° precedente, cioè dall'identità:

$$a_x^m \alpha_y^n = D^n\left\{a_x^m \alpha_x^m\right\} + \mu_1 (xy) D^{n-1}\left\{(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1}\right\} +$$

$$+ \mu_2 (xy)^2 D^{n-2}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2} \alpha_x^{n-2}\right\} + \cdots$$

si deduce dunque, operando sui due membri con $\Omega$, l'identità:

$$(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_y^{n-1} = \mu_1 \frac{m+n}{mn} D^{n-1}\left\{(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1}\right\} +$$

$$+ \mu_2 \frac{2(m+n-1)}{mn} (xy) D^{n-2}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2} \alpha_x^{n-2}\right\} +$$

$$+ \mu_3 \frac{3(m+n-2)}{mn} (xy)^2 D^{n-3}\left\{(a\alpha)^3 a_x^{m-3} \alpha_x^{n-3}\right\} + \cdots$$

e dividendo entrambi i membri per $(a\alpha)$:

$$a_x^{m-1} \alpha_y^{n-1} = \mu_1 \frac{m+n}{mn} D^{n-1}\left\{a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1}\right\} + \mu_2 \frac{2(m+n-1)}{mn} (xy) D^{n-2}\left\{(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1}\right\}$$

$$+ \mu_3 \frac{3(m+n-2)}{mn} D^{n-3}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2} \alpha_x^{n-2}\right\} + \cdots$$

Dal paragone delle (3) e (4) si vede che se $1, \mu_1, \mu_2, \cdots$ sono i coefficienti dello sviluppo di $f(x^m; y^n)$, i coefficienti dello sviluppo di $f(x^{m-1}; y^{n-1})$ sono invece:

$$\mu_1 \frac{m+n}{mn}, \quad \mu_2 \frac{2(m+n-1)}{mn}, \quad \mu_3 \frac{3(m+n-2)}{mn}, \quad \cdots$$

10. Se dunque indichiamo il coefficiente $\mu_i$ nell'$i+1^{esimo}$ termine dello sviluppo (2) del §° precedente con

$$\mu_i = \vartheta(m, n, i) \quad , \quad \mu_0 = \vartheta(m, n, 0) = 1$$

per mettere in evidenza che esso è funzione dei numeri $m, n, i$, abbiamo la relazione funzionale:

$$\vartheta(m-1, n-1, i-1) = \frac{i(m+n-i+1)}{mn}\,\vartheta(m, n, i)$$

dalla quale cambiando $m, n, i$ in $m-1, n-1, i-1$, poi in $m-2, n-2, i-2$, ecc. si deduce il sistema di relazioni:

$$\vartheta(m, n, i) = \frac{mn}{i(m+n-i+1)}\,\vartheta(m-1, n-1, i-1)$$

$$\vartheta(m-1, n-1, i-1) = \frac{(m-1)(n-1)}{(i-1)(m+n-i)}\,\vartheta(m-2, n-2, i-2)$$

$$\vartheta(m-2, n-2, i-2) = \frac{(m-2)(n-2)}{(i-2)(m+n-i-1)}\,\vartheta(m-3, n-3, i-3)$$

. . . . . .

$$\vartheta(m-i+1, n-1+1, 1) = \frac{(m-i+1)(n-i+1)}{1\cdot(m+n-2i+2)}$$

che moltiplicate membro a membro ci dànno immediatamente:

$$\mu_i = \vartheta(m, n, i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{i}}{\binom{m+n-i+1}{i}}\,.$$

Lo sviluppo di Clebsch e Gordan è dunque:

$$(5)\quad f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = D^n E_0 + \frac{\binom{m}{1}\binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}}(xy)D^{n-1}E_1 + \frac{\binom{m}{2}\binom{n}{2}}{\binom{m+n-1}{2}}(xy)^2 D^{n-2}E_2 + \cdots$$

---

## §° IV. *Proprietà fondamentali delle spinte (Ueberschiebungen) fra due forme binarie* -

11 - Date due forme binarie:

$$f(x) \equiv f = a_x^m, \qquad \varphi(x) \equiv \varphi = b_x^n, \tag{1}$$

l'espressione simbolica:

$$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k} \tag{2}$$

rappresenta, come sappiamo (cfr. Cap. II, §° VIII) un covariante simultaneo del sistema delle due forme fondamentali (1). Questo covariante si chiama la $k^{esima}$ *spinta* od anche il $k^{imo}$ *scorrimento* (traduzioni della denominazione tedesca *Ueberschiebung*(*)) della forma $f$ sulla forma $\varphi$; e si indica anche con

$$(f, \varphi)^{(k)}. \tag{2}$$

È senz'altro evidente che:

$$(f, \varphi)^{(k)} = (-1)^k (\varphi, f)^{(k)} \tag{3}$$

Questa formola mette in evidenza (per $\varphi \equiv f$) che: *le spinte di ordine dispari di una forma qualunque su se stessa sono nulle identicamente*. Applicando al prodotto:

$$f(x)\,\varphi(y) = a_x^m \cdot b_y^n$$

l'operazione

$$\Omega = \overline{\Omega}_{xy}$$

già considerata nei due §§ precedenti, si ottiene successivamente (cfr. Cap. I° § XVII):

$$\Omega\left\{f(x)\varphi(y)\right\} = (ab)\,a_x^{m-1}\,a_y^{n-1}$$

$$\Omega^2\left\{f(x)\varphi(y)\right\} = (ab)^2\,a_x^{m-2}\,a_y^{n-2}$$

. . . . . .

---

(*) Cfr. le opere di *Clebsch*: *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig 1872) e di *Gordan*: *Vorlesungen über Invariantentheorie* (Vol. 2°, Leipzig 1887).

onde si può scrivere:

$$(f, \varphi)^{(k)} = \left[\Omega^k \left\{ f(x)\varphi(y) \right\}\right]_{y=x} , \qquad (4)$$

e questa formola si può anche considerare come una definizione operativa della $k^{esima}$ spinta di $f$ sopra $\varphi$.

La (4) mette intanto in evidenza che, se $C$ è una costante, si ha:

$$(Cf, \varphi)^{(k)} = C(f, \varphi)^{(k)} ,$$

13. Sia ora:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\lambda(x)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_\mu(x)$$

Si ha per la (4):

$$(f, \varphi)^{(k)} = \left[\Omega^k \left\{ \sum_{j=1}^{j=\mu} \sum_{i=1}^{i=\lambda} f_i(x)\varphi_j(y) \right\}\right]_{y=x}$$

e quindi anche:

$$(f, \varphi)^{(k)} = \left[\sum_{j=1}^{j=\mu} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \left\{ \Omega^k f_i(x)\varphi_j(y) \right\}\right]_{y=x}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=\mu} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \left[\Omega^k f_i(x)\varphi_j(y)\right]_{y=x}$$

cioè per la (4):

$$(f, \varphi)^{(k)} = \sum_{j=1}^{j=\mu} \sum_{i=1}^{i=\lambda} (f_i, \varphi_j)^{(k)} \qquad (5)$$

Pertanto: *La $k^{esima}$ spinta di una somma di forme sopra un'altra*

somma di forme è uguale alla somma delle $k^{esime}$ spinte dei singoli addendi della prima somma sui singoli addendi della seconda.

14. Se

$$f(x) = f_1(x)^{g_1} f_2(x)^{g_2} \cdots f_\lambda(x)^{g_\lambda}$$

e

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)^{\gamma_1} \varphi_2(x)^{\gamma_2} \cdots \varphi_\mu(x)^{\gamma_\mu}$$

cosicchè:

$$m = g_1 + g_2 + \cdots + g_\lambda \quad , \quad n = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu ,$$

si ha evidentemente per la (4):

$$(f, \varphi)' = \frac{1}{mn} \left[ \sum_{i=1}^{i=\lambda} \sum_{j=1}^{j=\mu} \left\{ \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y_1} \right) F_{ij}(x;y) \right\} \right]_{y=x}$$

essendo $F_{ij}(x;y)$ il prodotto $f_1(x) f_2(x) \cdots f_\lambda(x) \varphi_1(y) \varphi_2(y) \cdots \varphi_\mu(y)$ da cui siansi soppressi i fattori $f_i(x)$ e $\varphi_j(y)$; e quindi anche:

$$(f, \varphi)' = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \sum_{j=1}^{j=\mu} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1} \right) f_i(x) \varphi_j(y) \right]_{y=x} F_{ij}(x;x)$$

$$= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \sum_{j=1}^{j=\mu} g_i \gamma_j \left[ \Omega \cdot f_i(x) \varphi_j(y) \right]_{y=x} F_{ij}(x;x)$$

ossia per la (4):

$$(f, \varphi)' = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \sum_{j=1}^{j=\mu} g_i \gamma_j \cdot (f_i, \varphi_j)' \cdot F_{ij}(x;x) \tag{6}$$

Dunque: per ottenere la prima spinta di un prodotto di più forme sopra un altro prodotto di più forme, basta sommare tutti i risultati che si ottengono spingendo un fattore qualunque

*del primo prodotto sopra un fattore qualunque del secondo e moltiplicando questa spinta per i gradi dei fattori spinti e per il prodotto dei fattori rimanenti.*

Alla (6) può anche darsi la forma equivalente:

$$mn\,\frac{(f,\varphi)'}{f\cdot\varphi}=\sum_{i=1}^{i=\lambda}\sum_{j=1}^{j=\mu}{}' g_i\,\gamma_j\,\frac{(f_i,\varphi_j)}{f_i\cdot\varphi_j} \qquad (6)'$$

in cui la espressione sotto il sommatorio è composta colle forme $f_i$, $\varphi_j$ precisamente come il primo membro è composto colle forme $f$ e $\varphi$.

Non esiste una formola analoga alle (6) per le spinte di ordine superiore al primo di due prodotti, l'uno sull'altro.

15. Per la definizione stessa dell'operatore $\Omega$ si ha:

$$\Omega^k\left[f(\overset{m}{x})\cdot\varphi(\overset{n}{y})\right]=\frac{1}{m(m-1)\cdots(m-k+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_1}\right)^k\left[f(x)\varphi(y)\right]$$

o anche:

$$\frac{\lfloor m\ \lfloor n}{\lfloor m-k\ \lfloor n-k}\,\Omega^k\left[f(\overset{m}{x})\cdot\varphi(\overset{n}{y})\right]=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^k\left[f(x)\cdot\varphi(y)\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\frac{\partial^k}{\partial y_2^k}-\binom{k}{1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}}{\partial y_2^{k-1}}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}+\right.$$

$$\left.+\binom{k}{2}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}\frac{\partial^{k-2}}{\partial y_2^{k-2}}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\cdots\pm\frac{\partial^k}{\partial x_2^k}\frac{\partial^k}{\partial y_1^k}\right)\left[f(x)\cdot\varphi(y)\right]$$

$$=\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^k}\frac{\partial^k\varphi(y)}{\partial y_2^k}-\binom{k}{1}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2}\frac{\partial^k\varphi(y)}{\partial y_2^{k-1}\partial y_1}+$$

$$+\binom{k}{2}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k-2}\partial x_2^2}\frac{\partial^k\varphi(y)}{\partial y_2^{k-2}\partial y_1^2}-\cdots\pm\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_2^k}\frac{\partial^k\varphi(y)}{\partial y_1^k}$$

Se dunque si fa in questa identità $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, si ottiene per la (4), la seguente espressione operativa della $k^{esima}$ spinta di $f$ su $\varphi$

$$\frac{\lfloor m \; \lfloor n}{\lfloor m-k \; \lfloor n-k}\left(f(\overset{m}{x}), f(\overset{n}{x})\right)^k =$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^k} - \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k \partial x_2}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-1}\partial x_1} +$$

$$+ \binom{k}{2}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-2}\partial x_2^2}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-2}\partial x_1^2} - \cdots \pm \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k},$$

## §° V. Deduzione di tutti gl'invarianti e covarianti di un sistema di forme fondamentali per mezzo di spinte sulle forme stesse.

16. Tale deduzione si può fare per mezzo dello sviluppo di Clebsch e Jordan

Sia infatti:

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2; a_1, a_2; b_1, b_2; \ldots)$$

un covariante del sistema fondamentale dato espresso coi simboli $a, b, c, \ldots$ delle forme fondamentali. Consideriamo la forma con due serie di variabili $x$ ed $y$:

$$\Phi(x_1, x_2; -y_2, y_1, b_1, b_2; \ldots) = \Psi(\overset{n}{x}; y)$$

dedotta dalla precedente sostituendo ad una serie di simboli, p. es. a quelli $a_1, a_2$ di una certa forma fondamentale:

$$f = \overset{n}{a_x} = \overset{n}{c_x} = \ldots$$

le $y$ nel modo indicato. Sviluppando colla formola di Clebsch e Gordan, si potrà scrivere:

$$\Psi(x;y^n)=\sum_i \mu_i (xy)^i \cdot D_{xy}^{\lambda-i} E_i \qquad (1)$$

essendo le $\mu_i$ dei coefficienti numerici ed

$$E_i=\Delta^{n-i}\Omega^i\Psi(x;y)=E_i(x_1,x_2;b_1,b_2;\ldots)$$

un covariante del sistema proposto, colla sola serie di variabili $x$, che contiene una serie di simboli di meno di $\Phi$.

Se poniamo simbolicamente:

$$E_i=\theta_x^p,$$

si può scrivere in luogo di (1):

$$\Psi(x;y)=\sum_i \nu_i (xy)^i \theta_x^{p-\lambda+i}\theta_y^{\lambda-i}$$

essendo le $\nu$ dei coefficienti numerici; e se in questa identità si pone $y_1=a_2$, $y_2=a_1$, si ottiene:

$$\Phi=\sum_i (-1)^i \nu_i a_x^i \theta_x^{p-\lambda+i}(\theta a)^{\lambda-i},$$

cioè anche:

$$\Phi=\sum_i (-1)^i \nu_i \cdot (E_i,f)^{(\lambda-i)}$$

Il covariante $\Phi$ viene così espresso come una somma di spinte, sopra una delle forme fondamentali di certi covarianti $E_i$, i quali sono, nei coefficienti delle forme fondamentali, di un grado inferiore di un'unità al grado di $G$.

Questi covarianti si faranno alla lor volta dipendere allo stesso modo da spinte di altri covarianti di grado inferiore di 2 unità al grado di $\Phi$, sopra la stessa $f$ o su altre forme fondamentali. Così procedendo, è chiaro che il covariante $\Phi$ si verrà ad ottenere mediante spinte successive sulle forme fondamentali di covarianti di 1° grado, i quali altro non sono che le stesse forme fondamentali. L'asserto è così dimostrato.

17 - Se introduciamo il simbolo $[F, \overset{\lambda}{\Phi}, \overset{\mu}{\Psi}, \dots]$ per designare il risultato che si ottiene facendo la spinta $\lambda^{\text{esima}}$ di $F$ su $\Phi$, poi la $\mu^{\text{esima}}$ del risultato già ottenuto sulla $\Psi$, e così via, segue da quanto si è dimostrato che: *se $\Phi$ è un covariante del grado $g_1$ nei coefficienti della forma fondamentale $f_1$, del grado $g_2$ in quelli della forma fondamentale $f_2$ e così via, si può scrivere:*

$$\Phi = \sum A_{h_1 h_2 \dots h_g, k_1 k_2 \dots k_{g_2} \dots} \left[ f_1, \overset{h_1}{f_1}, \overset{h_2}{f_1}, \dots, \overset{h_{g_1-1}}{f_1}, f_2, \overset{k_1}{f_2}, \overset{k_2}{f_2}, \dots \overset{k_{g_2-1}}{f_2}, \dots \right]$$

*essendo le $A$ certi coefficienti numerici.*

In particolare, se $\Phi$ è un covariante di peso $\tau$ e di grado $g$ nei coefficienti dell'unica forma fondamentale $f$, si avrà

$$\Phi = \sum_{h_1+h_2+\dots+h_g=\tau} A_{h_1 h_2 \dots h_g} \left[ f, \overset{h_1}{f}, \overset{h_2}{f}, \dots, \overset{h_g}{f} \right],$$

poichè è facile riconoscere (cfr. Cap. II° art. 12) che la $k^{\text{esima}}$

spinta di un covariante di peso $\tau$ su un covariante di peso $\tau'$ è un covariante di peso $\tau+\tau'+k$.

---

## §° VI. Calcolo della $k^{esima}$ spinta fra due covarianti posti sotto la forma simbolica caratteristica.

18. È facile di riconoscere come la $i^{esima}$ spinta fra due aggregati di elementi simbolici caratteristici

$$a_x\,,\ b_x\,,\ c_x\,,\ \ldots\,,\ (a\,b)\,,\ (a\,c)\,,\ \ldots$$

si possa eseguire in modo che il risultato si presenti direttamente sotto la forma caratteristica. È chiaro infatti primieramente, per il teorema dell'art. 13, che basterà dimostrare ciò per la $k^{esima}$ spinta di un prodotto di elementi simbolici caratteristici sopra un altro prodotto di elementi simbolici caratteristici.

Se ora i due prodotti simbolici siano rispettivamente:

$$\Pi = (a\,b)^m (a\,c)^n \ldots (c\,d)^r \cdot a_x^{\mu}\, b_x^{\nu} \ldots d_x^{\rho}$$

$$\Pi' = (\alpha\,\beta)^{m'} (\alpha\,\gamma)^{n'} \ldots (\gamma\,\delta)^{\rho'} \cdot \alpha_x^{\mu'}\, \beta_x^{\nu'} \ldots \gamma_x^{\rho'},$$

si ha intanto (art. 12):

$$(\Pi\,,\,\Pi')^{(i)} = (a\,b)^m (a\,c)^n \ldots (c\,d)^r (\alpha\,\beta)^{m'} (\alpha\,\gamma)^{n'} \ldots (\gamma\,\delta)^{\rho'} \cdot (P\,,\,P')^{(i)} \qquad (1)$$

dove

$$P = a_x^{\mu}\, b_x^{\nu} \ldots d_x^{\rho} \qquad (2)$$

$$P' = \alpha_x^{\mu'}\, \beta_y^{\nu'} \ldots \delta_x^{\rho'}, \qquad (3)$$

cosicchè si tratta soltanto (art. 12) di calcolare l'espressio

ne simbolica:

$$(P, P')^{(i)} = \left[\Omega^i \{a_x^\mu b_x^\nu \dots d_x^\rho \alpha_y^{\mu'} \beta_y^{\nu'} \dots \delta_y^{\rho'}\right]_{y=x}$$

Ora questo calcolo non è che un caso particolare di quello da noi già considerato al capitolo II° (§ I°). Esso si effettua appunto mediante operazioni che consistono nel sopprimere due elementi lineari p. es. $a_x$ e $b_y$ sostituendo ad essi la parentesi $(a\,b)$; cosicchè il risultato del calcolo sostituito in (1) ci dà appunto per $(\Pi, \Pi')^{(i)}$ un aggregato razionale intero di elementi simbolici caratteristici

19. La spinta $i^{esimo}$ del prodotto simbolico (2) sul prodotto simbolico (3) si può però anche ridurre a calcoli di polare come segue. Si ponga simbolicamente:

$$(4) \qquad P = a_x^\mu b_x^\nu \dots d_x^\rho = P_x^h \qquad , \quad h = \mu + \nu + \dots + \rho$$

$$(5) \qquad P' = \alpha_x^{\mu'} \beta_x^{\nu'} \dots \delta_x^{\rho'} = Q_x^k \qquad k = \mu' + \nu' + \dots + \rho',$$

cosicchè:

$$(P, P')^{(i)} = (P, P')^i P_x^{h-i} Q_x^{k-i}.$$

Poichè:

$$\widehat{D}_{xy}^i P = P_y^i P_x^{h-i}$$

ed il secondo membro di questa identità, quando si ponga:

$$y_1 = Q_2 \ , \quad y_2 = -Q_1$$

si cambia in:

$$(PQ)^i P_x^{k-i},$$

possiamo scrivere evidentemente:

$$(P, P')^{(i)} = Q_x^{k-i} \cdot \left[ \overline{D}_{xy}^{\,i} \, P \right]_{y_1 = Q_2,\, y_2 = -Q_1} \tag{6}$$

Se ora si tiene presente l'espressione (2) di $P$, si vede che il secondo membro di (6) è una somma

$$\sum R$$

di termini $R$ ognuno dei quali, fatta astrazione da un coefficiente numerico, è della forma:

$$R = Q_x^{k-i} a_x^{\mu''} b_x^{\nu''} \cdots d_x^{\rho''} (aQ)^{\mu'''} (bQ)^{\nu'''} \cdots (dQ)^{\rho'''} \tag{7}$$

Ci resta quindi soltanto a vedere come si calcoli una espressione della forma (7). Ora si ha evidentemente:

$$Q_x^{k-i} (aQ)^{\mu'''} (bQ)^{\nu'''} \cdots (dQ)^{\rho'''} =$$

$$\left[ D_{xy}^{\mu'''} D_{xz}^{\nu'''} \cdots D_{xt}^{\rho'''} \cdot Q \right]_{\substack{y_1 = -a_2,\, y_2 = a_1 \\ z_1 = -b_2,\, z_2 = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1 = -d_2,\, t_2 = t_1}},$$

cosicchè si può scrivere:

$$R = a_x^{\mu''} b_x^{\nu''} \cdots d_x^{\rho''} \left[ D_{xy}^{\mu'''} D_{xz}^{\nu'''} \cdots D_{xt}^{\rho'''} Q \right]_{\substack{y_1 = -a_2,\, y_2 = a_1 \\ z_1 = -b_2,\, z_2 = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1 = -d_2,\, t_2 = d_1}} \tag{8}$$

Poichè:

$$Q = \alpha_x^{\mu'} \beta_x^{\nu'} \cdots \delta_x^{\rho'},$$

è ora manifesto che il secondo membro di (8) si presenterà, eseguite le operazioni di polare e le sostituzioni indicate, come un aggregato di elementi simbolici caratteristici:

$$a_x\,,\ b_x\,,\ \ldots\,,\ d_x\,,\ \alpha_x\,,\ \beta_x\,,\ \ldots\,,\ \delta_x$$

$$(a\alpha),\ (a\beta),\ \ldots\,,\ (a\delta),$$

$$(b\alpha),\ (b\beta),\ \ldots\,,\ (b\delta),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(d\alpha),\ (d\beta)\ \ldots\,,\ (d\delta),$$

come appunto si voleva.

20. Vogliasi calcolare, ad esempio, la seconda spinta fra i due prodotti:

$$P = P_x^{\,6} = a_x^{\,2}\, b_x^{\,2}\, c_x^{\,2}\,, \qquad Q = Q_x^{\,5} = \alpha_x^{\,3}\, \beta_x^{\,2}\,. \tag{9}$$

Si ha primieramente:

$$(P,Q)'' = (PQ)^2 P_x^{\,4} Q_x^{\,3} = Q_x^{\,3}\left[\overline{D}_{xy}^{\,2}\, P_x^{\,6}\right]_{y_1 = Q_2,\ y_2 = -Q_1} \tag{10}$$

Ora si trova subito:

$$\overline{D}_{xy}\, P_x^{\,6} = \tfrac{1}{3}\left\{a_x\, a_y\, b_x^{\,2}\, c_x^{\,2} + a_x^{\,2}\, b_x\, b_y\, c_x^{\,2} + a_x^{\,2}\, b_x^{\,2}\, c_x\, c_y\right\},$$

d'onde si deduce poi:

$$\overline{D}_{xy}^{\,2}\, P_x^{\,6} = \tfrac{1}{15}\Big\{a_y^{\,2}\, b_x^{\,2}\, c_x^{\,2} + a_x^{\,2}\, b_y^{\,2}\, c_x^{\,2} + a_x^{\,2}\, b_x^{\,2}\, c_y^{\,2}$$

$$+ 4 a_x a_y b_x b_y c_x^{\,2} + 4 a_x a_y b_x^{\,2} c_x c_y + 4 a_x^{\,2} b_x b_y c_x c_y\Big\}$$

Si ha dunque per la (10):

$$15(P,Q)'' = Q_x^3 (aQ)^2 b_x^2 c_x^2 + Q_x^3 (bQ)^2 a_x^2 c_x^2 + Q_x^3 (cQ)^2 a_x^2 b_x^2$$
$$+ 4 Q_x^3 (aQ)(bQ) a_x b_x c_x^2 + 4 Q_x^3 (aQ)(cQ) a_x b_x^2 c_x +$$
$$+ 4 Q_x^3 (bQ)(cQ) a_x^2 b_x c_x .$$

Si osserverà ora per esempio, che:

$$Q_x^3 (aQ)^2 b_x^2 c_x^2 = b_x^2 c_x^2 \left[ D_{xy}^2 Q_x^6 \right]_{y_1 = -a_2,\ y_2 = -a_1},$$

$$Q_x^3 (aQ)(bQ) a_x b_x c_x^2 = a_x b_x c_x^2 \left[ \overline{D}_{xy}\, \overline{D}_{xz}\, Q_x^5 \right]_{\substack{y_1 = -a_2,\ y_2 = a_1 \\ z_1 = -b_2,\ z_2 = b_1}}$$

ecc.

Ora si trova subito dalla seconda delle (9):

$$\overline{D}_{xy}\, Q_x^5 = \frac{1}{5} \left\{ 3 \alpha_x^2 \alpha_y \beta_x^2 + 2 \alpha_x^3 \beta_x \beta_y \right\}$$

d'onde poi:

$$\overline{D}_{xy}^2 Q_x^5 = \frac{1}{10} \left\{ 3 \alpha_x \alpha_y^2 \beta_x^2 + 6 \alpha_x^2 \alpha_y \beta_x \beta_y + \alpha_x^3 \beta_y^2 \right\},$$

$$\overline{D}_{xy}\, \overline{D}_{xz}\, Q_x^5 = \frac{1}{10} \left\{ 3 \alpha_x \alpha_z \alpha_y \beta_x^2 + 3 \alpha_x^2 \alpha_y \beta_x \beta_z \right.$$
$$\left. + 3 \alpha_x^2 \alpha_z \beta_x \beta_y + \alpha_x^3 \beta_z \beta_y \right\},$$

ecc.

Si ha dunque per le (11):

$$10 Q_x^3 (aQ)^2 b_x^2 c_x^2 = b_x^2 c_x^2 \left\{ 3 (a\alpha)^2 \alpha_x \beta_x^2 + 6 (a\alpha)(a\beta) \alpha_x^2 \beta_x + (a\alpha)^2 \alpha_x^3 \right\},$$

$$10 Q_x^3 (aQ)(bQ) a_x b_x c_x^2 =$$

$$a_x b_x c_x^2 \left\{ 3 (a\alpha)(b\alpha) \alpha_x \beta_x^2 + 3 (a\alpha)(b\beta) \alpha_x^2 \beta_x + 3 (a\beta)(b\alpha) \alpha_x^2 \beta_x + (a\beta)(b\beta) \alpha_x^3 \right\},$$

ecc. ecc.

---

## §° VII. *Relazioni identiche fra prime e seconde spinte.*

21. Siano date tre forme binarie $f$, $\varphi$, $\psi$ rispettivamente degli ordini $m, n, p$. Se poniamo simbolicamente:

$$f = a_x^m \quad , \quad \varphi = b_x^n \, , \quad \psi = c_x^p \, , \tag{1}$$

si ha:

$$(f, \varphi)' = (ab) a_x^{m-1} b_x^{n-1}$$

e quindi (art. 12):

$$\left((f, \varphi)', \psi\right)' = \left[\Omega\left\{(ab) a_x^{m-1} b_x^{n-1} c_y^p\right\}\right]_{y=x} =$$

$$= \frac{m-1}{m+n-2}(ab)(ac) a_x^{m-2} b_x^{n-1} c_x^{p-1} + \frac{n-1}{m+n-2}(ab)(bc) a_x^{m-1} b_x^{n-2} c_x^{p-1} \, ,$$

A cagione delle identità:

$$(ab)(ac) b_x c_x = \frac{1}{2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2\right\}$$

$$(ab)(bc) a_x c_x = -\frac{1}{2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (bc)^2 a_x^2 - (ac)^2 b_x^2\right\}$$

si può dunque anche scrivere:

$$\left((f, \varphi)' \psi\right)' = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+n-2}\left\{(ab) c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2\right\} a_x^{m-2} b_x^{n-2} c_x^{p-2}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{n-1}{m+n-2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (bc)^2 a_x^2 - (ac)^2 b_x^2\right\} a_x^{m-2} b_x^{n-2} c_x^{p-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m-n}{m+n-2}\,(ab)^2 a_x^{m-2} b_x^{n-2} \cdot c_x^{p}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{(ac)^2 a_x^{m-2} c_x^{p-2} \cdot b_x^{n} - (bc)^2 b_x^{m-2} c_x^{p-2} \cdot a_x^{m}\right\}.$$

Giungiamo così alla identità:

$$\Big((f,\varphi)',\psi\Big)' = \frac{1}{2}\,\frac{m-n}{m+n-2}\,\psi\cdot(f,\varphi)'' + \frac{1}{2}\left\{\varphi\cdot(f,\psi)'' - f\cdot(\varphi,\psi)''\right\} \qquad (2)$$

22. Per $\psi \equiv \varphi$, questa formola diviene:

$$\Big((f,\varphi)',\varphi\Big)' = \frac{m-1}{m+n-2}\,(f,\varphi)''\cdot\varphi - \frac{1}{2}\,f\cdot(\varphi,\varphi)''. \qquad (3)$$

Scambiando in questa formola $f$ con $\varphi$ si ha:

$$\Big((\varphi,f)',f\Big)' = \frac{n-1}{m+n-2}\,(f,\varphi)''\cdot f - \frac{1}{2}\,\varphi\cdot(f,f)'' \qquad (3)'$$

e dalle (3) e (3)' segue:

$$(n-1)f\cdot\Big((f,\varphi)',\varphi\Big)' + (m-1)\varphi\cdot\Big((f,\varphi)',f\Big)' =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(m-1)\varphi\cdot(f,f)'' - (n-1)f\cdot(\varphi,\varphi)''\right\}.$$

23. Dalla (2) si deduce con semplici scambii fra le $f, \varphi, \psi$:

$$\Big((\varphi,\psi)',f\Big)' = \frac{1}{2}\,\frac{n-p}{n+p-2}\,f\cdot(\varphi,\psi)'' + \frac{1}{2}\left\{\psi\cdot(\varphi,f) - \varphi\cdot(\psi,f)''\right\}$$

$$\Big((\psi,f)',\varphi\Big)' = \frac{1}{2}\,\frac{p-m}{p+m-2}\,\varphi\cdot(\psi,f)'' + \frac{1}{2}\left\{f\cdot(\psi,\varphi)'' - \psi\cdot(f,\varphi)''\right\}$$

e da queste uguaglianze sommate membro a membro colla (2) segue:

$$\Big((f,\varphi)',\psi\Big)' + \Big((\varphi,\psi)',f\Big)' + \Big((\psi,f)',\psi\Big) =$$

$$\frac{m-n}{2(m+n-2)}\,\psi\cdot(f,\varphi)'' + \frac{n-p}{2(n+p-2)}\,f\cdot(\varphi,\psi)'' + \frac{p-m}{2(p+m-2)}\,\varphi\cdot(\psi,f)''.$$

Di qui si vede in particolare che se $f, \varphi, \psi$ sono tre forme binarie dello stesso ordine, si ha identicamente:

$$\Big((f,\varphi)',\psi\Big)' + \Big((\varphi,\psi)',f\Big)' + \Big((\psi,f)',\psi\Big) = 0$$

24 - Se $f$ è una forma binaria in $x_1$, $x_2$ di ordine $m$ e si ponga:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = f_{ij}, \ \ldots,$$

si può scrivere pel teorema di Eulero:

$$f = f_1 x_1 + f_2 x_2 \tag{4}$$

e applicando nuovamente lo stesso teorema:

$$f_1 = f_{11} x_1 + f_{12} x_2 \quad , \quad f_2 = f_{21} x_1 + f_{22} x_2 \tag{5}$$

d'onde sostituendo in (4):

$$f = f_{11} x_1^2 + 2 f_{12} x_1 x_2 + f_{22} x_2^2, \tag{6}$$

ecc.

In virtù delle (5) si può scrivere, come è facile riconoscere(*):

$$(f,\varphi)' = f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

---

(*) Invero si ha identicamente:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = (ab)(ac)(bc), \quad \text{onde} \quad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_2^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = (ab)a_x b_x$$

Quindi per $f = a_x^m$, $\varphi = b_x^n$:

$$(f,\varphi) = (ab)a_x^{m-1}b_x^{n-1} = \begin{vmatrix} a_x^{m-2}a_1^2 & a_x^{m-2}a_1a_2 & a_x^{m-2}a_2^2 \\ b_x^{n-2}b_1^2 & b_x^{n-2}b_1b_2 & b_x^{n-2}b_2^2 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

25. Si ha poi (art. 15):

$$(f,\varphi)'' = \frac{1}{m(m-1)n(n-1)}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\right\}$$

(8)

$$= f_{11}\,\varphi_{22} - 2 f_{12}\,\varphi_{12} + f_{22}\,\varphi_{11} \; .$$

Pertanto, dalle (6), (7) ed (8) si deduce facilmente, applicando la regola di moltiplicazione dei determinanti, se $f, \varphi, \chi, \psi$ sono quattro forme binarie qualsivogliano:

$$2\cdot(f,\varphi)'\cdot(\chi\psi)' = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi_{22} & -2\chi_{12} & \chi_{11} \\ \psi_{22} & -2\psi_{12} & \psi_{11} \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f,\chi)'' & (f,\psi)'' & f \\ (\varphi,\chi)'' & (\varphi,\psi)'' & \varphi \\ \chi & \psi & 0 \end{vmatrix}$$

d'onde:

$$(f,\varphi)'(\chi,\psi)' = -\frac{1}{2}\left\{(f,\chi)''\varphi\psi + (\varphi,\psi)''f\chi - (f,\psi)''\varphi\chi - (\varphi,\chi)''f\psi\right\} \quad (9)$$

Per $\chi \equiv f$ si deduce di qui in particolare l'identità:

$$(f,\varphi)'(f,\psi)' = -\frac{1}{2}\left\{(f,f)''\varphi\psi - (f,\psi)''f\varphi - (f,\varphi)''f\psi + (\varphi,\psi)''f^2\right\} \quad (10)$$

e facendo poi anche $\varphi \equiv \psi$:

$$\left[(f,\varphi)'\right]^2 = -\frac{1}{2}\left\{(f,f)''\varphi^2 - 2(f,\varphi)''f\varphi + (\varphi,\varphi)''f^2\right\} \quad (11)$$

26. Se $f = a_x^m$, $\varphi = b_x^n$, $\psi = c_x^p$ sono tre forme binarie quali-

Si voglia, il covariante di peso 3:

$$U=(ab)(ac)(bc)a_x^{m-2}b_x^{n-2}e_x^{p-2} \tag{12}$$

si può esprimere identicamente anche sotto la forma:

$$U=\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} a_x^{m-2}b_x^{n-2}c_x^{p-2}=\begin{vmatrix} a_x^{m-2}a_1^2 & a_x^{m-2}a_1a_2 & a_x^{p-2}a_2^2 \\ b_x^{n-2}b_1^2 & b_x^{n-2}b_1b_2 & b_x^{p-2}b_2^2 \\ c_x^{p-2}c_1^2 & c_x^{p-2}c_1c_2 & c_x^{p-2}c_2^2 \end{vmatrix}$$

d'onde

$$U=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Ciò posto, possiamo facilmente dedurre di qui che anche per il covariante di peso dispari $U$ sussiste un teorema analogo a quello espresso dall'identità (11) cioè che il suo quadrato si può esprimere mediante covarianti di peso pari. Segue infatti dalla (13):

$$2U^2=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} \\ \varphi_{22} & -2\varphi_{12} & \varphi_{11} \\ \psi_{22} & -2\psi_{12} & \psi_{11} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (f,f)'' & (f,\varphi)'' & (f,\psi)'' \\ (\varphi,f)'' & (\varphi,\varphi)'' & (\varphi,\psi)'' \\ (\psi,f)'' & (\psi,\varphi)'' & (\psi,\psi)'' \end{vmatrix} \tag{14}$$

27. Essendo ancora $f, \varphi, \psi$ le stesse forme binarie dell'articolo precedente e $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ una serie ternaria, la forma:

$$F = \xi_1 f + \xi_2 \varphi + \xi_3 \psi$$

ha per seconda spinta su se stessa (art. 13):

$$(F, F)'' = \xi_1^2 (f, f) + \xi_1 \xi_2 (f, \varphi)'' + \dots$$

epperò si vede che $(F, F)''$ considerata come forma quadratica ternaria nelle $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ha per discriminante

$$\begin{vmatrix} (f, f)'' & (f, \varphi)'' & (f, \psi)'' \\ (\varphi, f)'' & (\varphi, \varphi)'' & (\varphi, \psi)'' \\ (\psi, f)'' & (\psi, \varphi)'' & (\psi, \psi)'' \end{vmatrix}$$

cioè, per la (14), appunto $2U^2$.

28. Qualunque sieno le forme binarie $f, \varphi, \psi$, si ha identicamente:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} & 0 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} & 0 \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{21} & -2f_{12} & f_{11} & 0 \\ \varphi_{21} & -2\varphi_{12} & \varphi_{11} & 0 \\ \psi_{21} & -2\psi_{12} & \psi_{11} & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi eseguendo, secondo la nota regola, il prodotto per orizzontali dei due determinanti del primo membro e tenendo presente le formole (6) ed (8):

$$\begin{vmatrix} (f,f)'' & (f,\varphi)'' & (f,\psi)'' & f \\ (\varphi,f)'' & (\varphi,\varphi)'' & (\varphi,\psi)'' & \varphi \\ (\psi,f)'' & (\psi,\varphi)'' & (\psi,\psi)'' & \psi \\ f & \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

29. In modo affatto simile, se $f, \varphi, \psi, \chi$ sono quattro forme binarie qualsivogliano, dall'identità:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} & 0 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} & 0 \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{22} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} & 0 \\ \varphi_{22} & -2\varphi_{12} & \varphi_{11} & 0 \\ \psi_{22} & -2\psi_{12} & \psi_{11} & 0 \\ \chi_{22} & -2\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

si deduce la relazione identica:

$$\begin{vmatrix} (f,f)'' & (f,\varphi)'' & (f,\psi)'' & (f,\chi)'' \\ (\varphi,f) & (\varphi,\varphi)'' & (\varphi,\psi)'' & (\varphi,\chi)'' \\ (\psi,f)'' & (\psi,\varphi) & (\psi,\psi)'' & (\psi,\chi)'' \\ (\chi,f)'' & (\chi,\varphi)'' & (\chi,\psi)'' & (\chi\chi)'' \end{vmatrix} = 0$$

- Fine -